Université de Montréal

Un principe du maximum en théorie des fonctions pour des domaines non-bornés

par

Richard Piché

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Discipline

mars 2006

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Un principe du maximum en théorie des fonctions pour des domaines non-bornés

présenté par

Richard Piché

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yvan Saint-Aubin

(président-rapporteur)

Paul M. Gauthier

(directeur de recherche)

Rahman, Quazi Ibadur

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

La date d'acceptation 09/03/06

SOMMAIRE

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un domaine borné et que f est une fonction holomorphe définie sur Ω, alors est vérifiée la relation suivante :

$$\boxed{\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.}$$

Cette relation se généralise, dans certaines situations, à des domaine Ω non-bornés. Dans ce mémoire, nous présentons une caractérisation de ces domaines, développée par Gauthier, Grothmann et Hengartner [9].

Mots clés : fonction holomorphe, domaines non-bornés, principe du maximun, accessibilité.

ABSTRACT

Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a bounded domain, and assume f is a holomorphic function in Ω. Then the following relation holds :

$$\boxed{\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.}$$

In some cases, this relation can be generalized to unbounded domain Ω. In this masters thesis, we present a characterization of those domains to which the above relation holds, discovered by Gauthier, Grothmann and Hengartner [**9**].

Keywords : holomorphic function, unbounded domain, maximun principle, accessibility.

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier en premier lieu deux professeurs du département de mathématiques de l'Université de Montréal : André Giroux et Norbert Schlomiuk ; ces deux personnes ont cru en moi, en mes capacités de conprendre, de réussir. Traversant une période de doute, cette confiance qu'ils m'ont témoignées fut très réconfortante et combien valorisante. Ils m'auront permis de poursuivre mon travail.

Je dois évidemment remercier ma femme, Marie-Josée, ma petite fille Ésokia. Leur support inconditionnel fut un point d'appui indispensable tout au long de ce travail. Je veux leur dédier toute les heures passées à lire, écrire, à essayer de comprendre la complexité de certain concepts. En fait, je veux leur rendre tout ce qu'ils m'ont donné, tout ce qu'ils m'ont apporté au cours de ce travail.

En terminant je dois remercier M. Yvan Saint-Aubin pour sa présence, son écoute ; je le remercie pour toute cette considération dont il a fait preuve à mon égard, et à celle de ma petite famille.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

Les fonctions holomorphes jouissent de propriétés qui les rendent particulièrement intéressantes à étudier. Une branche des mathématiques appelée la théorie des fonctions leur est d'ailleurs entièrement consacrée. Dans ce mémoire, nous allons investiguer une de ces propriétés caractéristiques des fonctions holomorphes. En fait, c'est la généralisation de cette propriété à des sous-ensembles non-bornés de $\mathbb{C}$ qui sera le point de départ de notre recherche.

Il n'existe pas de relation d'ordre pour les nombres complexes mais l'évaluation de leur module, qui est une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ permet d'introduire un ordre parmis les valeurs que prendra une certaine fonction, en comparant le module de chacune de ces valeurs. Le fait d'être holomorphe dans une region du plan complexe impose à une fonction des contraintes assez sévères quant à la distribution de ses valeurs. Cet attribut aura donc une incidence sur la distribution des valeurs maximales du module de la fonction. Les fonctions holomorphes sont tributaires du **Principe du maximum** dont voici l'énoncé :

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine borné. Si f est holomorphe dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$, alors $|f|$ atteint son maximum sur $\partial\Omega$.

Donc une fonction holomorphe, lorsque définie dans un domaine borné du plan complexe et continue sur sa fermeture, aura la particularité que la valeur maximum de son module sera atteinte sur la frontière du domaine. Symboliquement,

$$\boxed{\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.} \tag{0.0.1}$$

Une des hypothèses du théorème mis à part, bien entendu, le fait que la fonction soit holomorphe, concerne le domaine de définiton de la fonction ; Ω doit être borné. Il est légitime de se demander si cette condition est nécéssaire ; existe-t-il des domaines non-bornés pour lesquels le **Principe du maximum** reste valide ? La réponse est affirmative. Trois mathématiciens : Gauthier, Grothmann et Hengartner, ont cherché à caractériser ces domaines non-bornés $\Omega \subset \mathbb{C}$ pour lesquels nous avons :

$$\boxed{\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.} \tag{0.0.2}$$

Ils y sont parvenus. Cette caractérisation est de nature topologique ; elle fait intervenir la notion *d'accessibilité du point à l'infini*. L'article dans lequel ils ont publié leur résultat **[9]** traite le cas du **Principe du maximum** dans des domaines non-bornés, pour les fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques. Dans ce mémoire nous présentons une preuve originale pour le cas des fonctions holomorphes.

Au cours de la rédaction de notre preuve, nous avons eu recours, à un certain moment, à un théorème d'approximation pour les fonctions holomorphes s'appliquant à des sous-ensembles fermés, non-bornés, du plan complexe. Notre source était un autre article de Gauthier **[7]**, sur l'approximation uniforme ; l'auteur citait un théorème découvert par une mathématicienne suisse, Alice Roth, théorème qu'elle publia dans sa thèse de doctorat en 1938. À partir de ce point l'orientation de notre travail prit une nouvelle tangente ; nous nous fixâmes comme objectif, dans la rédaction de ce mémoire de, non seulement rédiger une preuve du **Principe du maximum** (généralisée aux domaines non-bornés) pour les fonctions holomorphes, mais d'également fournir et d'étudier la preuve du théorème d'approximation de Roth. Notre démarche aura donc été à rebours ; nous décidâmes finalement de fournir une justification de tout les résultats utilisés dans le mémoire, en présumant le niveau de connaissances mathématiques du lecteur comme étant celui du baccalauréat en mathémathiques.

Avant la contribution de Roth à la théorie de l'approximation uniforme nous possédions des résultats en ce qui a trait à l'approximation faite sur des ensembles bornés ; figuraient parmi cette liste le **Théorème de Runge** (1885) en approximation rationnelle sur des compacts, le **Théorème de Walsh** (1926) en approximation polynomial sur des arcs de Jordan compacts. Mais c'est lorsqu'elle introduisit son **Lemme de fusion** qu'il fut théoriquement possible de généraliser les résultats que nous avions en approximation rationnelle sur des compacts à des résultats en approximation, cette fois faite à l'aide de fonctions méromorphes, généralisation des fonctions rationnelles, à des ensembles fermés et donc possiblement non-bornés. Une des conséquences de cette contribution sera le **Théorème de localisation de Roth** avec comme corollaire une généralisation du **Théorème du Runge** nous permettant d'approximer des fonctions holomorphes sur des fermés, possiblement non-bornés, à l'aide de fonctions méromorphes.

Le parcours de Roth en recherche mathématique en est un pour le moins particulier. En effet, après avoir déposé en 1938 sa thèse de doctorat, thèse pour laquelle on lui décerna un prix en argent ainsi qu'une médaille en guise de reconnaissance de l'excellence de son travail, elle passa les 30 années qui suivirent coupée du monde de la recherche, contrainte avec une lourde charge d'enseignante dans une école secondaire. C'est seulement au moment de prendre sa retraite en 1971 comme enseignante qu'elle va renouer avec le monde de la recherche, après plus de 30 années d'isolement. Cette nouvelle carrière sera malheureusement de courte durée. Alice Roth nous quittera le 11 juillet 1977.

Il n'est pas déraisonnable de penser que si Roth avait pu, comme la plupart des chercheurs, consacrer toute sa carrière au domaine de la recherche, avec des fonds de recherche à sa disposition comme c'est le cas pour la grande majorité des chercheurs, alors on peut supposer que le domaine de l'approximation uniforme qualitative serait probablement bien différent.

Chapitre 1

NOTIONS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

1.1. Introduction

Comme la caractérisation des domaines non-bornés pour lesquels le **Principe du maximum** reste valide en est une de nature topologique, il nous semble opportun de débuter notre étude par une révision des concepts topologiques inhérents à cette identification.

Si nous devions résumer en un mot les attributs topologiques de ces domaines Ω pour lesquels

$$\boxed{\sup_{\Omega}|f| = \sup_{\partial\Omega}|f|,} \tag{1.1.1}$$

(où f est holomorphe sur Ω) c'est le terme **accessibilité** qui nous vient à l'esprit. Cette notion est la pierre d'assise de l'étude du **Principe du maximum** pour les domaines non-bornés. Pour cette raison, nous traiterons le concept de connexité en détail, en particulier la connexité par arcs mais aussi la connexité locale. Nous consacrerons également une section à l'étude des espaces compacts car nous ferons de l'approximation sur ces espaces, plus particulièrement lorsque nous aborderons le **Théorème de Runge** au chapitre 2.

La dernière section de ce chapitre porte sur les **Espaces topologiques métrisables**. Dans ces espaces sont équivalentes trois définitions de la compacité d'un espace topologique soient :

- compact par recouvrement
- compact par limite

– compact par suite[1].

Nous aurons besoin de ce fait dans la preuve que nous présenterons du **Principe du maximum** pour les domaines non-bornés, à la dernière section du chapitre 4.

1.2. Connexité

Définition 1.2.1. *Soit Ω un espace topologique. Par une séparation de Ω on entend une paire de sous-ensembles non-vides, ouverts et disjoints de Ω telle que leur union soit Ω. Un espace Ω est dit connexe si il n'existe pas de séparation de Ω.*

Une formulation équivalente à cet énoncé souvent employée comme définition de connexité est la suivante : *l'espace Ω est dit connexe si, et seulement si, les seuls sous-ensembles de Ω qui soient à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et Ω.*

Si ω est un sous-espace d'un espace topologique Ω, nous pouvons définir la connexité en utilisant l'énoncé du théorème qui suit :

Théorème 1.2.1. *Si ω est un sous-espace d'un espace topologique Ω, une séparation de ω consiste en une paire de sous-ensembles disjoints et non-vides A, B telle que $\omega = A \cup B$ et que aucun de ces deux ensembles ne contiennent un point limite de l'autre membre de la paire. Nous dirons, comme précédemment, que ω est connexe si il n'existe pas de séparation de ω.*

Démonstration. Supposons d'abord que A et B forment une séparation de ω. Il faut montrer qu'aucun de A ou de B ne contient un point limite de l'autre. Par rapport à ω, A est à la fois ouvert et fermé. La fermeture de A comme sous-ensemble de ω est $\overline{A} \cap \omega$ où $\overline{A}$ est la fermeture de A lorsque consideré comme sous-ensemble de Ω. Mais puisque A est fermé dans ω nous avons $A = \overline{A} \cap \omega$.

$$\boxed{\therefore \overline{A} \cap B = \emptyset.}$$

[1]Cette terminologie découle d'une traduction littérale de l'anglais. Elle sera définie de façon précise dans la section 6 de ce chapitre.

Comme $\overline{A}$ est l'union de A et de ses points limites alors B ne contient aucun point limite de A. De manière analogue on montre que A ne contient aucun point limite de B.

Maintenant supposons que A et B sont deux ensembles disjoints non-vides dont l'union est ω mais tels que aucun de A ou de B ne contienne un point limite de l'autre membre de la paire.

$$\Rightarrow \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\overline{A} \cap \omega &= \overline{A} \cap (A \cup B)\\ &= (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)\\ &= A \cup \emptyset\\ &= A.\end{aligned}$$

De manière analogue on montre que $\overline{B} \cap \omega = B$. Donc A et B sont fermés dans ω. Mais puisque $A = \omega - B$ et que $B = \omega - A$, ils sont également ouverts. Donc les ensembles A et B forment une séparation de ω. $\square$

L'exemple qui suit est tiré du livre de topologie de J. Munkres [**12**], p.149. L'auteur se limite au cas où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. J'aimerais reprendre cet exemple où, dans un premier temps, comme dans le livre, Ω est un sous-espace de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ pour ensuite, dans un deuxième temps, utiliser le fait que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ pour finalement le compactifier en lui ajoutant un point à savoir, le point à l'infini, $z = \infty$, et le considérer cette fois, comme sous-espace de $\overline{\mathbb{C}}$.

Exemple 1.2.1. *Considérons le sous-ensemble suivant de* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\Omega = \left\{(x, y) | \, x > 0 \; et \; y = \frac{1}{x}\right\} \cup \{(x, y) | \, x > 0 \, et \, y = 0\}.$$

Ω n'est pas connexe car les deux ensembles dont il est formé définissent une séparation de celui-ci. En effet ce sont deux ensembles disjoints, non-vides tels qu' aucun d'entre eux ne contient un point limite de l'autre membre de la paire.

Exemple 1.2.2. *Considérons, cette fois le sous-ensemble suivant de* $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ *:*

$$\begin{aligned}\Omega^* &= \Omega \cup \{\infty\} \\ &= \left\{z = x + iy \mid x > 0 \; et \; y = \frac{1}{x}\right\} \cup \{(x,y) \mid x > 0 \, et \, y = 0\} \cup \{z = \infty\}.\end{aligned}$$

Cette fois, Ω^*[2] *est connexe car il est connexe par arcs, notion que nous définirons dans la prochaine section et qui implique la connexité.*

La pertinence de cette version modifiée de l'exemple de Munkres tient au fait que l'un des objectifs de ce mémoire est de présenter une version du **Principe du maximum** pour les fonctions holomorphes adapté aux domaines non-bornés. Interviendra alors une caractérisation de ces domaines impliquant la compactifiée par un point dite d'Alexandroff du plan complexe, nous permettant de traiter ce problème en considérant le domaine non-borné comme sous-espace de la **sphère de Riemann**, c'est-à-dire comme sous-ensemble de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Si on fait l'union d'ensembles connexes ayant un point en commun alors l'ensemble résultant est également connexe. Cette énoncé sera appuyé par un théorème mais sa preuve requiert l'utilisation d'un résultat que nous introduisons au moyen du lemme suivant :

Lemme 1.2.1. *Si les ensembles C et D constituent une séparation d'un espace topologique Ω et que Y est un sous-ensemble connexe de Ω alors, Y est contenu entièrement, ou bien dans C, ou bien dans D.*

DÉMONSTRATION. Puisque C et D sont tout deux ouverts dans Ω, les ensembles $C \cap Y$ et $D \cap Y$ sont ouverts dans Y. Ces deux ensembles sont disjoints et leur union est Y ; si ils étaient tout deux non-vides ils définiraient une séparation de Y ce qui est impossible puisque Y est connexe par hypothèse. Par conséquent l'un d'eux est vide, ce qui montre que Y est contenu entièrement dans l'un de C ou de D (disjonction exclusive). □

Théorème 1.2.2. *L'union d'une famille de sous-ensembles connexes d'un espace topologique Ω ayant un point en commun est également connexe.*

---

[2]L'astérisque, dans les cas plus généraux, est parfois utilisée pour symbolisée la compactification d'un espace topologique par un point.

Démonstration. Soit $\{A_\alpha\}$ une famille de sous-ensembles connexes de Ω ; soit p un point de $\bigcap A_\alpha$. Nous démontrerons que l'espace $Y = \bigcup A_\alpha$ est connexe. Supposons le contraire ; on suppose qu'il existe une séparation de Y : $Y = C \cup D$. Le point p doit appartenir à l'un de C ou de D ; disons que $p \in C$. Puisque les ensembles A_α sont connexes, il doivent être contenus, entièrement, dans l'un de C ou D ; ce ne peut être que C car C contient déjà un de leurs points à savoir celui qu'ils ont en commun : p. Par conséquent $A_\alpha \subset C$ pour chaque α. Ceci implique $\bigcup A_\alpha \subset C$. Ce qui contredit le fait que D était non-vide par hypothèse. Puisque de supposer qu'il existait une séparation de Y nous a conduit à une contradiction, nous devons rejetter cette hypothèse. Par conséquent, Y est connexe. □

Théorème 1.2.3. *Soit Ω un sous-espace connexe d'un espace topologique X. Si $\Omega \subset A \subset \overline{\Omega}$, alors A est aussi connexe.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une séparation de A c'est-à-dire qu'il soit possible d'écrire $A = B \cup C$, ou B et C sont deux ensembles ouverts, disjoints et non-vides. Du lemme 1.2.1 on obtient que l'ensemble Ω doit être contenu, ou bien entièrement dans B ou bien, entièrement dans C ; admettons que $\Omega \subset B$. Alors $\overline{\Omega} \subset \overline{B}$; puisque $\overline{B}$ et C sont disjoints (théorème :1.2.1) on obtient $A \cap C = \emptyset$. Ceci entre en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle C est non-vide.

$$\boxed{\therefore\ A \textit{ est connexe.}}$$

□

Une des grandes vertus des applications continues est de préserver la connexité, comme le démontre le théorème suivant.

Théorème 1.2.4. *L'image d'un ensemble connexe par une fonction continue est un ensemble connexe.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ une fonction continue, où X est un espace connexe. Puisque l'application $f : X \to f(X)$ demeure une application continue, il sera suffisant de se limiter au cas des fonctions continues surjectives,

$$\boxed{g : X \to H.}$$

À partir d'ici nous procèderons par l'absurde : supposons que $H = A \cup B$ est une séparation de H. Par continuité de g, nous avons que $g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B) = X$ est une séparation de X, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle X est connexe. Puisque cette contradiction résulte du fait que nous ayons posé comme hypothèse qu'il existait une séparation de H, cette dernière doit être rejetée : H est connexe. $\square$

Le théorème précédent, conjugué au fait que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe, nous permet de déduire la connexité de certains sous-ensembles de $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ qui, autrement, nécessiterait un travail ardu. Mais avant d'en fournir un exemple, nous introduirons, au moyen d'une définition, la notion de chemin dans un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$. Cette dernière sera utilisée afin de nous présenter un autre aspect de la connexité. Ce concept est d'autant plus important qu'il joue une rôle primordial dans la caractérisation obtenue par Gauthier, Grothmann et Hengartner des sous-ensembles non-bornés $\Omega \subset \mathbb{C}$ pour lesquels le **Principe du maximum** demeure valide.

1.3. Connexité par arcs

Définition 1.3.1. *Soit deux points $x, y \in \Omega$. Par un chemin de x à y nous entendons une application continue $\lambda : [a,b] \to \Omega$ d'un intervalle fermé de la droite réelle où $\lambda(a) = x$ et $\lambda(b) = y$.*

Définition 1.3.2. *Un espace Ω est dit connexe par arcs si il est possible de joindre n'importe quelle paire de points $x, y \in \Omega$ par un chemin contenu dans Ω.*

Il est facile de démontrer qu'un espace connexe par arcs est connexe : soit Ω un espace connexe par arcs, supposons que $\Omega = A \cup B$ est une séparation de Ω. Si $\lambda : [a,b] \to \Omega$ est une application continue d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans Ω, $\lambda([a,b])$ est forcément connexe par le théorème 1.2.4. Puisque A et B sont disjoints, $\lambda([a,b])$ est, ou bien contenu dans A, ou bien contenu dans B. Il n'existe donc pas de chemin ayant comme point d'origine un élément de A et comme point d'arrivé un élément de B. Par conséquent Ω n'est pas connexe par arcs. Puisque cette contradiction (notre hypothèse de départ était que Ω est connexe par arcs) résulte du fait que nous avons supposé qu'il existait une séparation de Ω alors cette hypothèse doit être rejetée : Ω est connexe.

La réciproque cependant n'est pas vraie : un espace connexe n'est pas nécessairement connexe par arcs comme l'illustre l'exemple qui suit.

Exemple 1.3.1. *Soit* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; y = \sin(\frac{1}{x}), 0 < x \leq 1)\}$, *$\Omega$ étant l'image d'un ensemble connexe, à savoir l'intervalle* $(0,1]$, *par une application continue, il est connexe. Sa fermeture* $\overline{\Omega}$ *l'est également ; elle est formée des points de* Ω *auxquels est ajouté l'intervalle* $[-1,1]$ *de l'axe des* y. $\overline{\Omega}$ *n'est pas connexe par arcs : supposons qu'un chemin* $\lambda : [0,1] \to \overline{\Omega}$ *commençant à l'origine et se terminant à un point de* Ω *existe. L'ensemble des* $t \in [0,1]$ *tel que* $\lambda(t) \in [-1,1]$ *de l'axe des* y *est fermé par la continuité de* λ. *Cet ensemble possède donc un élément maximum* t_{max}. *Alors* $\lambda : [t_{max}, 1] \to \overline{\Omega}$ *envoie* t_{max} *sur l'intervalle* $[-1,1]$ *de l'axe des* y *et* $(t_{max}, 1]$ *dans* Ω. *Pour le reste de la démonstration nous utiliserons une représentation paramétrique du chemin* λ, *c'est-à-dire que nous posons* $\lambda(t) = (x(t), y(t))$. *Il est clair que* $x(0) = 0, \quad x(t) > 0$ *et* $y(t) = \sin\left(\frac{1}{x(t)}\right)$ *pour* $t > 0$. *On construit une suite de points* $\{t_n\}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ *mais que* $y(t_n) = (-1)^n$.

Afin de déterminer t_n *on procède comme suit : choissons* $0 < t_n < \frac{1}{n}$ *de sorte que* $\sin\left(\frac{1}{t_n}\right) = (-1)^n$. *On aura compris que dans cette construction,* $x(t) = t$.

Alors la suite $\{y(t_n)\}$ *ne converge pas, ce qui contredit l'hypothèse de continuité de la fonction* λ. *Cette contradiction étant basée sur l'existence présumée du chemin continu* λ, *cette hypothèse doit être rejetée : un tel chemin n'existe pas et par conséquent,* Ω *ne peut donc être connexe par arcs.*

1.4. Connexité locale

Nous allons introduire dans cette section la notion de connexité locale ainsi que celle de composante. Il serait légitime de penser que si un espace donné est connexe alors forcément, puisque la propriété est vérifiée pour l'ensemble dans son entier, elle doit être nécessairement vraie dirions-nous, localement. Mais il n'en est rien de la connexité et il sera impératif de s'en convaincre et de se familiariser avec ce fait, afin de pouvoir progresser dans notre étude du **Principe du maximum** pour les domaines non-bornés.

Définition 1.4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$. On définit une relation d'équivalence dans Ω de la manière suivante : on dit que deux points $z_1, z_2 \in \Omega$ sont équivalents, noté $z_1 \sim z_2$ si il existe un sous-espace connexe de Ω contenant ces deux points. Les classes d'équivalence de Ω seront ce que nous nommerons les composantes de Ω.*

Théorème 1.4.1. *Les composantes de Ω sont des sous-espaces disjoints de Ω dont l'union est Ω et telles que chaque sous-espace connexe de Ω n'a une intersection non-vide qu'avec une seule de ces composantes.*

DÉMONSTRATION. Étant des classes d'équivalences de Ω ces composantes sont disjointes et leur union est, précisément, Ω. On vérifie que l'intersection d'un sous-espace connexe de Ω avec une composante de ce dernier n'est non-vide que pour exactement une seule de ces composantes. En effet, si A est sous-espace connexe de Ω et C_1, C_2 sont deux de ces composantes et que de plus, $x_1 \in A \cap C_1$ et $x_2 \in A \cap C_2$ alors, de la connexité de A nous obtenons $x_1 \sim x_2$ ce qui entraine que $C_1 = C_2 = C$. □

Soit Ω un espace topologique. On peut définir sur ce dernier une relation d'ordre de la manière suivante : soit A et B deux sous-ensembles connexes de Ω ; nous écrirons $A \leq B$ si et seulement si $A \subseteq B$. Le couple $(\Omega, \leq)$ ainsi défini est un ordre partiel.

Soit x un point quelconque de l'espace topologique Ω. Désignons par C_x la composante de Ω contenant le point x. En utilisant la définition 1.4.1 on montre que C_x est un élément maximal de $(\Omega, \leq)$ parmi les sous-ensembles connexes de Ω contenant x.

Définition 1.4.2 (Connexité locale). *Un espace topologique Ω est dit localement connexe au point x si, pour tout voisinage U de x, il existe une voisinage connexe V de x contenu dans U. Si Ω est localement connexe en chacun de ses points, on dira alors que Ω est localement connexe.*

Remarque 1.4.1. *Les propriétés de connexité ainsi que de connexité locale ne sont pas équivalentes comme le montre le prochain exemple :*

Exemple 1.4.1. *Soit $\Omega = [0,1) \cup (1,2]$. Alors dans cet exemple Ω est localement connexe mais n'est pas connexe.*

On voit qu'il est assez aisé d'imaginer une situation où nous avons un espace localement connexe mais qui n'est pas connexe. Un exemple illustrant la situation inverse à savoir, un espace connexe qui n'est pas localement connexe est beaucoup difficile à trouver. Un peu plus loin dans le mémoire, au chapitre 3 plus exactement, nous rencontrerons une telle instance d'un ensemble connexe mais non localement connexe. Ce contre-exemple porte le nom de **gant d'Arakelyan** (voir exemple 3.2.1).

1.5. Espaces compacts

Un autre concept topologique nous sera essentiel pour cette étude sur le **Principe du maximum** appliqué à des domaines non-bornés, soit celui d'espace topologique compact. Il est beaucoup moins intuitif que celui d'espace connexe ; il est cependant indispensable car, malgré le fait qu'un de nos objectifs principaux soit d'obtenir un théorème d'approximation pour les fonctions holomorphes définies sur des sous-ensembles non-bornés du plan complexe, nous débuterons la partie principale de notre exposé par la présentation, au chapitre 2, du **Théorème de Runge**. Ce théorème est un résultat très significatif en approximation uniforme qualitative. Son énoncé dit, en substance, qu'il est possible d'approximer uniformément une fonction holomorphe, sur un compact, par des fonctions rationnelles dont les pôles sont situés dans le complémentaire de ce dernier.

Le concept d'espace topologique compact, dans sa définition, fait intervenir la notion de recouvrement d'un espace topologique dont voici la définition :

Définition 1.5.1. *Une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles d'un espace topologique Ω est un recouvrement de Ω si l'union des éléments de $\mathcal{A}$ égale Ω. On parle d'un recouvrement par des ouverts si les éléments de $\mathcal{A}$ sont des sous-ensembles ouverts de Ω.*

Nous pouvons maintenant présenter la définition d'un espace topologique compact en terme de recouvrement. D'autres formulations faisant intervenir des notions différentes de celle de recouvrement existent et, dans certains contextes, peuvent être équivalentes à celle que nous présentons, mais notre formulation est la forme la plus générale. Nous aborderons ces différentes formes de la définition d'un espace topologique compact à la dernière section du présent chapitre.

Définition 1.5.2. *Un espace topologique Ω est dit compact si, pour tout recouvrement de Ω par une famille d'ouverts $\mathcal{A}$, il existe une sous-famille finie de $\mathcal{A}$ qui recouvre également Ω.*

En dépit du fait que la notion d'espace compact en soit une plutôt abstraite lorsqu'envisagée dans des espaces topologiques généraux, elle revêt un aspect beaucoup plus accessible, intuitivement, lorsque considérée dans des espaces topologiques dit métrisables[3] tel $\mathbb{R}^n$. Nous aborderons ce concept dans la section suivante.

Théorème 1.5.1. *Tout sous-ensemble fermé d'un espace topologique compact est compact.*

Démonstration. Soit ω un sous-ensemble fermé d'un espace topologique compact Ω. Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement de ω par des ensembles ouverts (pour la topologie de ω). Chaque $A \in \mathcal{A}$ est de la forme $A' \cap \omega$, où A' est un ouvert de Ω. Soit $\mathcal{B} = \{A' : A \in \mathcal{A}\}$. Complétons $\mathcal{B}$ afin qu'il devienne un recouvrement de Ω, c'est-à-dire posons

$$\boxed{\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\Omega - \omega\}.}$$

$\mathcal{B}'$ est un recouvrement de Ω par des ouverts. Par hypothèse, il existe une sous-famille finie $\mathcal{B}'_f$ de $\mathcal{B}'$ qui recouvre Ω. Si $\{\Omega - \omega\} \in \mathcal{B}'_f$, éliminons-le sinon, on laisse $\mathcal{B}'_f$ intact. $\mathcal{A}_f = \{A' \cap \omega : A' \in \mathcal{B}'_f\}$ est une sous-famille finie de $\mathcal{A}$ recouvrant ω.

$$\boxed{\therefore\ \omega \text{ est compact.}}$$

□

Puisque notre étude a lieu dans $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{C}}$ qui sont homéomorphes respectivement à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, nous aurons avantage à utiliser la caractérisation suivante des espaces compacts :

Théorème 1.5.2. *Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est compact si, et seulement si, il est fermé et borné par rapport à la métrique euclidienne où on mesure la distance*

[3] Un espace topologique Ω est dit métrisable si il existe une métrique définie sur Ω qui induit la topologie de Ω.

entre deux points quelconques $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *de la façon suivante :*

$$\boxed{d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que Ω est compact. Comme $\mathbb{R}^n$ est un espace de Hausdorff[4] et qu'un sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff est fermé, Ω est fermé. Considérons la famille d'ouverts suivante : $\mathcal{A} = \{B(0,m) | \; m \in \mathbb{Z}_+\}$, l'ensemble des boules ouvertes centrées à l'origine et de rayon $r = m$. Nous savons que

$$\boxed{\bigcup_{m=1}^{\infty} B(0,m) = \mathbb{R}^n,}$$

l'union de cette famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ est un recouvrement de ce dernier par des ouverts. Par conséquent, $\mathcal{A}' = \{B(0,m) \cap \Omega : \; m \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement de Ω par des ouverts. L'hypothèse implique qu'il existe un sous-famille finie $\mathcal{A}'_f$ de $\mathcal{A}'$ qui recouvre également Ω. Puisque les ensembles composant cette famille sont de la forme : $B(0,m) \cap \Omega$ et qu'ils sont en nombre fini, on choisit l'élément de la famille $\mathcal{A}'_f$ dont la boule possède le plus grand rayon. Soit r_{max} le rayon de cette boule, il est clair que si x et y sont deux points de Ω alors $d(x,y) \leq 2 \cdot r_{max}$, ce qui entraîne que Ω est borné.

Supposons maintenant que Ω soit fermé et borné par rapport à la métrique euclidienne d. Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $d(x,y) \leq M$ pour tout $x, y \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$ et posons $d(z,0) = N$. De l'inégalité du triangle on déduit, pour tout $w \in \Omega$,

$$\begin{aligned} d(w,0) &\leq d(w,z) + d(z,0) \\ &\leq M + N \end{aligned}$$

Posons $P = M + N$. Alors $\Omega \subset [-P,P]^n$. L'intervalle $[-P,P]^n$ est compact alors, Ω étant un sous-espace fermé d'un compact, il est compact également. $\square$

[4] Un espace topologique Ω est dit **espace de Hausdorff** si pour tous points x_1, x_2 distincts de l'espace considéré, il existe des voisinages disjoints de ces points.

1.6. Espaces topologiques métrisables

La définition donnée plus haut d'un espace topologique compact n'est pas très naturelle. Il est difficile, à la lumière de cette dernière, d'avoir une idée claire de ce à quoi doit ressembler un espace topologique compact. Il existe deux autres formulations de la définition d'espace topologique compact. Elles ont l'avantage d'être plus intuitives, plus faciles à conceptualiser ; elles sont par contre des formulations plus faibles que la définition que nous avons donnée à la section précédente. Cependant, dans le cas d'espaces où la topologie est induite par la métrique, ce qui ce trouve à être le cas du plan complexe ou de la sphère de Riemann, les trois formes sont équivalentes.

Avant de démontrer cette équivalence nous devons d'abord introduire, au moyen d'un lemme, le concept de nombre de Lebesgue. Dans ce lemme, nous utiliserons la notion de distance d'un point à un sous-ensemble d'un espace métrique qui se fonde sur la mesure de la distance entre deux points ; dans $\mathbb{C}$ cette mesure s'exprime comme le module de leur différence.

Définition 1.6.1 (Distance d'un point à un ensemble). *Soit (Ω, ρ) un espace métrique ; soit A un sous-ensemble non-vide de Ω. Pour chaque $z \in \Omega$, on définit* ***la distance*** *de z à A, notée $\rho(z, A)$, par l'équation*

$$\boxed{\rho(z, A) := \inf\{\rho(z, a) |\ a \in A\}.}$$

Nous aborderons également dans la définition du nombre de Lebesgue un autre concept relatif aux espaces métriques, soit celui de diamètre d'un sous-ensemble d'un espace métrique.

Définition 1.6.2 (Diamètre d'un ensemble). *Soit (Ω, ρ) un espace métrique et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble borné de Ω. On définit* ***le diamètre*** *de A le nombre réel suivant :*

$$\boxed{\sup\{\rho(x, y) | x, y \in A\}.}$$

Lemme 1.6.1 (Nombre de Lebesgue). *Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement d'un espace métrique (Ω, ρ) par des ouverts. Si Ω est compact, il existe un $\delta > 0$ tel que, quelque soit le sous-ensemble de Ω ayant un diamètre plus petit que δ, il existe un* *élément de $\mathcal{A}$ à l'intérieur duquel il est inclus. (δ est appelé* **nombre de Lebesgue** *du recouvrement $\mathcal{A}$.)*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement de Ω par des ouverts. Si Ω est un élément de $\mathcal{A}$ alors tout nombre positif est un nombre de Lebesgue de $\mathcal{A}$. Par conséquent, nous supposerons que Ω n'est pas un élément de $\mathcal{A}$. Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ une sous-famille finie de $\mathcal{A}$ recouvrant Ω. Pour chaque j posons $C_j = \Omega - A_j$ et définissons $f : \Omega \to \mathbb{R}$ comme étant la moyenne des nombres $\rho(z, C_j)$:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \rho(z, C_j).}$$

Montrons que $f(z) > 0$ pour tout $z \in \Omega$. Étant donné $z \in \Omega$, choisissons j de sorte que $z \in A_j$. Choisissons ensuite $\epsilon > 0$ tel que le voisinage $D(z, \epsilon)$ de z soit contenu dans A_j. Alors $\rho(z, C_j) \geq \epsilon$ ce qui implique que $f(z) \geq \frac{\epsilon}{n}$. Puisque f est continue et que Ω est compact, f atteint une valeur minimum positive, disons δ sur Ω ; nous allons maintenant montrer que δ est le nombre de Lebesgue convoité.

Soit B un sous-ensemble de Ω dont le diamètre est moindre que δ. Choisissons un point $z_0 \in B$. Il est clair que $B \subset D(z_0, \delta)$. Maintenant,

$$\boxed{\delta \leq f(z_0) \leq \rho(z_0, C_m),}$$

où $\rho(z_0, C_m)$ est le plus grand des nombres $\rho(z_0, C_j)$. Par conséquent, le voisinage $D(z_0, \delta)$ de z_0 est contenu dans l'élément $A_m = \Omega - C_m$ du recouvrement $\mathcal{A}$.

$\square$

Définition 1.6.3 (Compact par point limite). *Un espace topologique Ω est compact par point limite si tout sous-ensemble infini de Ω possède un point limite, c'est-à-dire que si $\omega \subset \Omega$ est un sous-ensemble de cardinalité infinie, alors il existe un point $x \in \omega$ tel que tout voisinage de x pour la topologie de Ω contient un point de ω différent de x.*

Définition 1.6.4 (Compact par suite). *Un espace topologique Ω est compact par suite si toute suite de points de Ω possède une sous-suite convergente.*

Afin d'intégrer la formulation d'espace topologique compact présentée au début de la section précédante à cette liste, nous conviendrons de l'appellation

compact par recouvrement un espace topologique satisfaisant aux critères de la définition 1.5.2.

Théorème 1.6.1. *Dans un espace métrique où la topologie est celle induite par la métrique, les trois formulations de la définition d'un espace topologique compact sont équivalentes :*

(1) compact par recouvrement,

(2) compact par point limite,

(3) compact par suite.

DÉMONSTRATION. *1)⇒2)* : Soit Ω un espace topologique compact par recouvrement. Étant donné un sous-ensemble A de Ω nous devons démontrer que si la cardinalité de A est infinie alors A possède un point limite. Nous allons plutôt démontrer la contraposée : si A n'a pas de point limite alors il est de cardinalité finie.

Supposons donc que A n'a pas de point limite. Alors A contient tout ses points limites, il est donc fermé. De plus, pour chaque $a \in A$ il existe un voisinage U_a de a tel que $U_a \cap A = a$. Alors,

$$\boxed{(\Omega \setminus A) \cup_{a \in A} U_a,}$$

est un recouvrement de Ω par des ouverts. Ce dernier étant compact par recouvrement, il existe un sous-recouvrement fini de Ω par ces ensembles. Puisque $(\Omega \setminus A) \cap A = \emptyset$ et que, chaque U_a, $a \in A$ ne contient qu'un seul point de A, le sous-ensemble A ne peut qu'être de cardinalité finie.

2)⇒3) : Supposons que Ω est compact par point limite. Soit $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ une suite de points de Ω. On considère l'ensemble $W = \{w_j | \ j \in \mathbb{Z}_+\}$. Si W est de cardinalité finie alors il existe forcément un $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ tel que $w_j = w_{j_0}$ pour une infinité de j. Dans ce cas, la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ possède une sous-suite qui est constante et par conséquent, elle converge. Si par contre, W est de cardinalité infinie alors, par hypothèse, W possède un point limite w_0. Nous allons extraire de $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ une sous-suite convergente vers w_0, de la manière suivante : on choisit j_1 tel que

$$\boxed{w_{j_1} \in B(w_0, 1).}$$

Supposons que l'entier j_{k-1} est donné tel que $w_{j_{k-1}} \in B(w_0, \frac{1}{k-1})$. Puisque la boule $B(w_0, \frac{1}{k})$ possède une infinité de points de W, il est possible de prendre $j_k > j_{k-1}$ tel que

$$\boxed{w_{j_k} \in B\left(w_0, \frac{1}{k}\right).}$$

Alors, la suite $w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots$ converge vers w_0.

3)⇒1) : Nous allons d'abord montrer que si Ω est compact par suite alors la conclusion du lemme sur le **nombre de Lebesgue**, lemme 1.6.1, est valide dans Ω. Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement de Ω par des ouverts. Supposons qu'il n'existe pas de $\delta > 0$ tel que chaque sous-ensemble de Ω de diamètre moindre que δ soit contenu dans un élément de $\mathcal{A}$ et essayons, à partir de cette hypothèse, de déduire une contradiction.

Notre hypothèse implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un sous-ensemble de Ω, de diamètre moindre que $\frac{1}{n}$, qui n'est contenu dans aucun des membres de la famille $\mathcal{A}$. Soit H_n un tel sous-ensemble. Pour chaque n on choisit un point $z_n \in H_n$. On obtient ainsi une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de point de Ω. Par hypothèse, il existe une sous-suite $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de cette dernière qui converge vers un point z_0 de Ω. Maintenant, z_0 appartient à un certain $A \in \mathcal{A}$. A étant ouvert, on peut choisir un $\epsilon > 0$ tel que $B(z_0, \epsilon) \subset A$. Si j est suffisamment grand nous aurons $\frac{1}{n_j} < \frac{\epsilon}{2}$ ce qui entrainera que H_{n_j} sera contenu dans un $\frac{\epsilon}{2}$-voisinage de z_{n_j} ; quitte si nécéssaire à choisir j encore plus grand, on peut faire en sorte que nous ayons également $\rho(z_{n_j}, z_0) < \frac{\epsilon}{2}$ ce qui entrainera que H_{n_j} sera inclus dans un ϵ-voisinage de z_0. Ceci implique que $H_{n_j} \subset A$ ce qui est contraire à notre hypothèse selon laquelle le lemme sur le **nombre de Lebesgue** n'était pas valide dans Ω. Par conséquent, nous ayant conduit à une contradiction, nous sommes forcés de reconnaitre que cette hypothèse était fausse ; le lemme sur le **nombre de Lebesgue** est valide dans Ω lorsque ce dernier est compact par suite.

Dans un deuxième temps, nous allons montrer que si Ω est compact par suite et que $\epsilon > 0$ nous est donné, il existe un recouvrement fini de Ω par des boules ouvertes de rayon ϵ. Supposons cette hypothèse fausse ; supposons que pour un certain $\epsilon > 0$, Ω ne puisse être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ. Nous allons construire une suite $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ de points de Ω de la manière suivante :

choisissons un premier point z_1 arbitraire de Ω. On prend ensuite notre deuxième point dans $\Omega \setminus B(z_1, \epsilon)$ (cette possibilité existe car autrement, $B(z_1, \epsilon)$ serait un recouvrement fini de Ω). Après avoir obtenus $z_1, \ldots, z_n$ on choisit z_{n+1} dans

$$\boxed{\Omega \setminus [\ B(z_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(z_n, \epsilon)\ ]}$$

en utilisant le fait que ces boules ne peuvent recouvrir Ω. On remarque que, par construction,

$$\boxed{\rho(z_{n+1}, z_j) \geq \epsilon,} \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, n.$$

Par conséquent, la suite $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ ne peut posséder une sous-suite convergente ; en fait, une boule de rayon $\frac{\epsilon}{2}$ peut contenir z_j pour au plus, une seule valeur de l'indice j. Cette contradiction prouve que si Ω est compact par suite alors il existe un recouvrement fini de Ω par des boules de rayons ϵ.

La dernière partie de la preuve consiste à démontrer que si Ω est compact par suite alors Ω est compact par recouvrement. Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement de Ω par des ouverts. Parce que Ω est compact par suite, il correspond à $\mathcal{A}$ un nombre de Lebesgue $\delta > 0$. Soit $\epsilon = \frac{\delta}{3}$; utilisant le fait que Ω est compact par suite, on trouve un recouvrement fini de Ω par des boules ouvertes de rayon ϵ. Chacune de ces boules possède un diamètre égale à $\frac{2\delta}{3}$ et, de ce fait, sont chacunes d'entre elles contenues dans un élément du recouvrement $\mathcal{A}$. Choisissons un élément de $\mathcal{A}$ pour chacune de ces boules ; on obtient une sous-famille finie de $\mathcal{A}$ recouvrant Ω. $\square$

Chapitre 2

APPROXIMATION RATIONNELLE

2.1. Introduction

Nous allons, dans cette première section, expliquer ce que l'on entend par approximation de fonctions et aussi en définir les paramètres.

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. En dépit du fait qu'elle soit holomorphe, la fonction f peut possiblement être d'une certaine complexité et il peut être avantageux à ce moment d'avoir une fonction plus simple, plus rudimentaire que f, mais qui se comporte sensiblement comme f sur K, afin de comprendre la nature de celle-ci. Une façon de quantifier le degré de ressemblance pourrait être de mesurer la "distance" qui les sépare sur K.

En d'autres mots, ce que nous faisons c'est d'approcher une fonction sur une portion du plan complexe au moyen d'une autre fonction, souvent plus simple ; ce pourrait être un polynôme, une fonction rationnelle, une fonction méromorphe. Dans ce chapitre nous utiliserons les fonctions rationnelles afin de réaliser l'approximation, c'est-à-dire que nous approcherons une certaine classe de fonctions sur un sous-ensemble du plan complexe à l'aide de fonctions rationnelles. Ce sous-ensemble de $\mathbb{C}$ sera d'abord un compact, comme dans l'énoncé du **théorème de Runge** qui sera traité dans la prochaine section. Plus tard, nous approximerons des fonctions définies sur des fermés quelconques et réaliserons un des objectifs de ce mémoire, soit l'approximation uniforme sur des non-bornés. La topologie qui entrera en jeu sera celle de $\mathbb{C}$ mais éventuellement, dans le cours de notre étude, ce qui sera le cas lorsque nous ferons de l'approximation sur des non-bornés, nous serons appelés à considérer la topologie de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire la compactification par un point du plan complexe : **la sphère de Riemann**.

Il reste à déterminer la façon dont nous mesurerons la distance entre deux fonctions sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1 (Distance entre deux fonctions). *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $K \subset \mathbb{C}$, on définit la distance entre f et g sur K notée $d_K(f,g)$, de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} d_K(f,g) &:= \|f-g\|_K \\ &= \sup_{z\in K} |f(z)-g(z)|. \end{aligned}$$

Cette façon de définir la distance entre deux fonctions sur un ensemble donné justifie l'utilisation du qualificatif uniforme lorsqu'on fait référence à ce type d'approximation.

Nous savons que la limite uniforme de fonctions continues est continue. Nous savons également que la limite uniforme de fonctions holomorphes sur un ouvert est holomorphe. Par conséquent, si une fonction f peut être approximée[1] sur un ensemble K par des fonctions entières ou des fonctions méromorphes n'ayant pas de pôles dans K, il découle nécessairement de la convergence uniforme que f est continue sur K et holomorphe dans l'intérieur de K. Il semble donc que la catégorie de fonctions la plus naturelle à tenter d'approximer serait les fonctions appartenant à $A(K)$: la classe des fonctions continues sur K et holomorphes dans l'intérieur de K.

[1]Lorsque nous utilisons le terme approximation, il sera toujours question d'approximation uniforme.

À cette fin nous introduisons la notation suivante pour identifier certains espaces fonctionnels définis sur un compact K :

$$K^o := \text{intérieur de}\, K;$$

$$C(K) := \{\text{ensemble des fonctions continues sur}\, K\};$$

$$A(K) := \{f \in C(K) : f\,\text{est holomorphe dans}\, K^o\};$$

$$P(K) := \{f \in A(K) : \forall\epsilon > 0,\ \exists\,\text{un polynôme}\ P\ \text{tel que}\, d_K(f, P) < \epsilon\};$$

$$R(K) := \{f \in A(K) : \forall\epsilon > 0,\ \exists\,\text{une fonction rationnelle}\ R\ \text{telle que}\ d_K(f, R) < \epsilon\}.$$

Pour le non-spécialiste, le plus célèbre résultat en approximation uniforme de fonctions continues définies sur un compact est, sans aucun doute, le **théorème d'approximation de Weierstrass** (1885). Ce théorème stipule que toute fonction continue sur un intervalle[2] $[a, b] \subset \mathbb{R}$ peut être approximée, uniformément par des polynômes.

Il n'est malheureusement pas toujours possible de réaliser l'approximation polynomiale uniforme sur des sous-ensembles compacts arbitraires du plan complexe. En effet, considérons l'exemple suivant :

Exemple 2.1.1. *Soit $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $f(z) = \frac{1}{z}$. Supposons qu'il soit possible d'approximer uniformément sur E la fonction f par une suite de polynômes ; postulons l'existence d'une suite de polynômes $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeant uniformément vers f sur E. Selon cette hypothèse, il existe, pour tout $\epsilon > 0$ un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ implique que*

$$\begin{aligned} \epsilon > d_E(f, p_n) &= \|f - p_n\|_E \\ &= \sup_{z\in E} |f(z) - p_n(z)| \\ &= \max_{z\in E} |f(z) - p_n(z)| \\ &= \max_{z\in E} \left|\frac{1}{z} - p_n(z)\right|. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

[2]fermé borné.

En particulier, si on choisit $\epsilon = \frac{1}{k}$ *l'inégalité 2.1.1 implique, pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, il existe un entier naturel* N_k *tel que si* $n > N_k$ *alors,*

$$\boxed{\left|\frac{1}{z} - p_n(z)\right| < \frac{1}{k},} \qquad \forall\, z \in E,$$

ce qui entraîne

$$\boxed{|\,1 - zp_n(z)| < \frac{|z|}{k} = \frac{1}{k},} \qquad \forall\, z \in E.$$

Maintenant la fonction $h(z) = 1 - zp_n(z)$ *est holomorphe pour tout* $z \in \overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$*. Nous avons* $|h(z)| < \frac{1}{k}$ *sur* ∂D*. Le principe du maximum pour les fonctions holomorphes implique que cette dernière inégalité est vérifiée, pour tout* $z \in D$*. Substituons donc* $z = 0$ *dans cette dernière, il s'en suit que*

$$\boxed{|h(0)| = 1 < \frac{1}{k},} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N};$$

ce qui est évidemment faux! Alors puisque le fait de supposer l'approximation uniforme de la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ *par des polynômes sur le cercle unité, conduit à une contradiction, nous sommes forcés de rejeter cette hypothèse : l'approximation polynomiale uniforme de la fonction* $f(z) = \frac{1}{z}$ *sur le compact* E *n'est donc pas possible.*

2.2. Le théorème de Runge

Le théorème de Runge marque pour ainsi dire le début de la théorie de l'approximation dans le plan complexe. La version que nous présentons dans cette section concerne l'approximation des fonctions holomorphes sur des sous-ensembles compacts du plan complexe par des fonctions rationnelles.

Définition 2.2.1 (Fonctions rationnelles). *Une fonction est dite rationnelle si elle peut s'écrire comme le quotient de deux polynômes :*

$$\boxed{R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.}$$

Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré plus grand que un peuvent s'écrire comme le produit de facteurs linéaires. On peut supposer que P et Q ne possèdent pas de facteurs communs. Chaque zéro de Q sera un pôle de la fonction rationnelle R et l'ordre du pôle de cette dernière sera, par conséquent, égal à l'ordre du zéro correspondant de Q. Donc, si R est rationnelle, elle admettera la représentation suivante :

$$\boxed{R(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{n} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),} \tag{2.2.1}$$

où $P_0,\ P_1, \ldots P_n$ sont des polynômes n'ayant pas de terme constant sauf peut-être P_0. Les constantes : $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ sont, quant à elles, les zéros de $Q(z)$. L'expression 2.2.1 est appelée la décomposition de R en fractions partielles.

Le lemme suivant sera utilisé afin de prouver le théorème de Runge ; il généralise en quelque sorte la formule de Cauchy.

Lemme 2.2.1. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et Ω un ouvert par rapport à la topologie de $\mathbb{C}$ tel que $K \subset \Omega$. Alors, il existe un nombre fini de segments verticaux et horizontaux orientés : $\gamma_1,\ \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ dans $\Omega \setminus K$ tel que si f est holomorphe dans Ω et que $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_N$ alors, pour tout $z \in K$ nous avons la représentation suivante :*

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.} \tag{2.2.2}$$

Il est important de prendre note que Γ ne dépend que de K ainsi que de Ω mais pas de f.

La preuve que nous allons présenter est essentiellement celle que l'on trouve dans le livre de Gaier [5], p.93. Dans sa preuve du théorème de Cauchy, Ahlfors utilise le même type de raisonnement, soit la construction d'une grille recouvrant un domaine du plan complexe à l'intérieur duquel est définie une fonction holomorphe. Il démontre effectivement que, grâce à cette technique, l'intégrale de la fonction sur un chemin fermé contenu dans ce domaine est égale à zéro.

Notre présentation déroge de celle présentée dans [5] à partir du moment où, pour justifier la validité de son procédé dans le cas où $z \in K$ serait un point appartenant à la frontière d'un des carrés de la grille, l'auteur invoque un argument impliquant la continuité sans donner plus de détails. Il nous semblait impératif de justifier, avec plus de précision, la validité de cette assertion. Nous sommes redevable à Rudin [15] pour la formalisation de l'argument avancé dans le livre Gaier ; nous fûmes largement inspiré par sa présentation lors de la rédaction.

DÉMONSTRATION. Posons $\delta := \rho(K, \partial\Omega) > 0$ (δ est la distance entre K et la frontière de Ω). Nous allons recouvrir le plan complexe d'une grille dont l'espacement entre les droites horizontales et les droites verticales de cette dernière est de h où $h < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$.

Chaque carré Q de la grille dont l'intersection avec le compact K est non-vide sera identifié au moyen d'un indice : $Q_1,\ Q_2,\ \ldots\ Q_M$. De cette construction découle la relation suivante :

$$\boxed{K \subset \bigcup_{i=1}^{M} Q_i \subset \Omega.}$$

La première inclusion est évidente. Pour ce qui est de la seconde, nous avons que si $z_0 \in Q_i \cap K$ pour un certain i alors le disque centré en z_0 et de rayon δ est forcément contenu dans Ω et avec lui, le carré Q_i dont le diamètre est égal à $h\sqrt{2} < \delta$.

Supposons la frontière ∂Q_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ de chaque carré orientée positivement. Dans chaque cas où deux carrés de la grille disons Q_j et Q_k, partagent une frontière en commun, on élimine cette dernière. Soient $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots, \gamma_{M_0}$ les côtés des carrés qu'il nous reste après avoir complété cette opération.

Aucun de ces segments ne rencontre K car si il en était ainsi, le segment en question appartiendrait à deux carrés adjacents et aurait donc été éliminé à l'étape précédente.

$$\boxed{\therefore \quad \Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{M_0} \subset \Omega \setminus K.}$$

Nous savons que, de part les propriétés inhérentes à l'intégrale curviligne, la relation suivante faisant intervenir $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$[3] est vérifiée, pour tout $z \in K$, $z \notin \partial Q_i$

[3] On définit, pour un chemin fermé $\Gamma \subset \mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'indice de z par rapport à Γ noté $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ l'intégrale suivante : $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$.

et ce, pour $i = 1, 2, \ldots, M$:

$$\boxed{\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = \sum_{i=1}^{M} \mathrm{Ind}_{\partial Q_i}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si il existe un i tel que } z \in Q_i; \\ 0, & \text{si } z \notin Q_i \text{ quelque soit i.} \end{cases}} \tag{2.2.3}$$

Donc, si $z \in K$ alors $z \notin \Gamma$ et par conséquent, z est un point limite de l'intérieur de un des Q_i et puisque le membre de gauche de 2.2.3 est constant et par conséquent continu pour chaque composante du complément de Γ^*, il découle de cette même relation que

$$\boxed{\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in K, \\ 0 & \text{si } z \notin \Omega. \end{cases}} \tag{2.2.4}$$

En d'autres mots, la relation 2.2.3 est également valide pour $z \in \partial Q_i$, c'est-à-dire pour les z appartenant aux frontières des carrés(les points de la grille). D'après la formule de Cauchy nous pouvons écrire, pour tout $z \in \Omega - \Gamma$:

$$\boxed{f(z) \cdot \mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.} \tag{2.2.5}$$

Le lemme découle de cette identité. □

Nous pouvons maintenant énoncer, et prouver, le théorème de Runge :

Théorème 2.2.1 (Runge, 1885). *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et f une fonction holomorphe sur K. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction rationnelle R avec pôles dans $K^c = \mathbb{C} \setminus K$ telle que*

$$\boxed{d_K(f, R) = \max_{z \in K} |f(z) - R(z)| < \epsilon.}$$

DÉMONSTRATION. L'idée de la preuve que nous allons présenter est d'utiliser le lemme précédent (lemme :2.2.1) afin de représenter f par la formule de Cauchy généralisée pour ensuite approximer l'intégrale apparaissant dans cette représentation, par ses sommes de Riemann.

Puisque f est holomorphe sur K, il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ tel que f est holomorphe dans Ω et $K \subset \Omega$.

Soit $\Gamma \subset \Omega - K$, le chemin dont l'existence fut démontrée dans le lemme précédent. Nous considérons la fonction de deux variables :

$$\boxed{F(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},} \qquad \text{pour } (\zeta, z) \in \Gamma \times K.$$

Puisque Γ est compact et que K l'est également, il en sera ainsi de leur produit cartésien. $F(\zeta, z)$ étant continue sur $\Gamma \times K$ elle est, par conséquent, uniformément continue sur ce dernier. Donc, si $\epsilon' > 0$ est donné, il existe alors un $\delta > 0$ tel que si ζ, $\zeta' \in \Gamma$ et que de plus, $|\zeta - \zeta'| < \delta$ alors

$$\boxed{\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta')}{\zeta' - z} \right| < \epsilon',} \qquad \text{pour } z \in K. \tag{2.2.6}$$

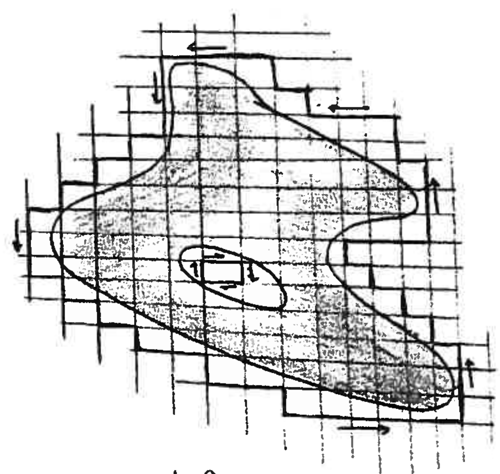

FIG. 2.2.1. Runge

Soit $P = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N\}$ une partition[4] de Γ. Cette dernière nous permet de représenter Γ comme l'union des segments induits par la partition de la façon suivante :

$$\Gamma = \cup_{j=1}^{N} \Gamma_j, \qquad \Gamma_j \text{ est la portion de } \Gamma \text{ allant de } \zeta_j \text{ à } \zeta_{j+1},$$

[4]Formellement, cette suite de points de Γ est induite par une partition de l'intervalle de paramétrisation du chemin Γ.

telle que $|\zeta_{i+1} - \zeta_i| < \delta$ pour $i = 1, 2, \ldots, N-1$ et que $z \in K$ est arbitraire. Alors,

$$\begin{aligned}
\left|f(z) - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} d\zeta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} d\zeta\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} d\zeta\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z}\right) d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z}\right| |d\zeta| \\
&< \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \epsilon' |d\zeta| \\
&= \frac{1}{2\pi}\epsilon' \sum_{j=1}^{N} |\Gamma_j| \; = \; \frac{\epsilon'}{2\pi}|\Gamma| \; = \; \epsilon,
\end{aligned}$$

si on choisit $\epsilon' = \frac{2\pi\epsilon}{|\Gamma|}$ dans 2.2.6. Ceci établit que la fonction rationnelle

$$\boxed{R(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} d\zeta \; = \; \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z}\int_{\Gamma_j} d\zeta \; = \; \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\zeta_j - z}}$$

approxime $f(z)$ uniformément sur K. Les pôles de la fonction rationnelle R sont les points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ situés sur le chemin Γ et de ce fait appartiennent à K^c. $\square$

2.3. Relocalisation des pôles pour les fonctions rationnelles

Dans cette section nous allons introduire une technique qui nous servira à déplacer, littéralement glisser, les pôles d'une fonction rationnelle le long d'une courbe de Jordan.

Ce qu'il y a de particulier à cette méthode, comme il sera possible de constater, est le fait que si la fonction d'origine est une fonction que nous utilisons pour faire de l'approximation, sur un compact par exemple, alors la nouvelle fonction rationnelle obtenue de la première à l'aide de cette technique pourra être utilisée également pour faire de l'approximation. Elle aura les mêmes attributs que la fonction rationnelle d'origine, c'est-à-dire qu'elle pourra être utilisée afin d'approximer la même fonction, sur le même compact et ce, avec le même niveau de précision que la fonction dont elle est issue.

Concrètement, supposons f une fonction holomorphe sur K, un compact, et R_1 une fonction rationnelle approximant f de manière uniforme sur K. Alors nous allons présenter un procédé nous permettant de construire une autre fonction rationnelle R_2 approximant f également de manière uniforme sur K mais dont les pôles sont différents de ceux de R_1.

Cette méthode est basée sur la possibilité de développer une fraction rationnelle en série de Laurent. Cette technique nous permet de choisir l'emplacement des pôles de la nouvelle fonction rationnelle avec pleine latitude, dans la mesure où le pôle choisi appartienne à la même composante du complémentaire de K que le pôle initial.

Lemme 2.3.1. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact dont le complémentaire, par rapport à $\mathbb{C}$, est noté K^c. Soit ζ un point de K^c et $R(z)$ une fonction rationnelle dont l'unique pôle est en $z = \zeta$:*

$$\boxed{R(z) = \frac{P(z)}{(z-\zeta)^k},} \qquad P(\zeta) \neq 0,$$

où le degré $P(z)$ est plus petit ou égale à k[5]. *Supposons que $\tilde{\zeta}$ appartienne à la même composante de K^c que ζ. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction rationnelle*

$$\boxed{\tilde{R}(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z-\tilde{\zeta})^{\tilde{k}}},} \qquad \tilde{P}(\tilde{\zeta}) \neq 0,$$

où le degré de $\tilde{P}(z)$ est plus petit ou égale à $\tilde{k}$ et telle que

$$\boxed{|R(z) - \tilde{R}(z)| < \epsilon} \qquad (z \in K).$$

[5]Si de degré de P était strictement plus grand que k alors la fonction rationnelle $R(z)$ aurait le comportement suivant au voisinage du point à l'infini : $\lim_{z\to\infty} R(z) = \infty$, c'est-à-dire que R aurait un pôle au point $z = \infty$. Mais dans ce cas, le pôle en $z = \zeta$ ne serait pas unique, contredisant l'hypothèse voulant que le pôle en $z = \zeta$ soit l'unique pôle de la fonction rationnelle R.

DÉMONSTRATION. Soit g la composante de K^c contenant ζ et $\tilde{\zeta}$. Soit $\gamma \subset g$ une courbe de Jordan joignant les deux points ζ et $\tilde{\zeta}$ et $\rho > 0$, la distance entre γ et K. Soit $\{\zeta = \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m = \tilde{\zeta}\}$ une partition de γ telle que $|\zeta_{j+1} - \zeta_j| < \frac{1}{2}\rho$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. On définit au moyen de cette dernière une fonction rationnelle de la manière suivante :

$$\boxed{R_1(z) := \frac{P(z)}{(z-\zeta)^k}\left[1 - \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{z - \zeta_1}\right)^{n_1}\right]^k = \frac{P_1(z)}{(z-\zeta_1)^{n_1 k}},}$$

où le degré de $P_1(z)$ est plus petit ou égale à $n_1 k$. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
|R_1(z) - R(z)| &= |R(z)|\left|\left[1 - \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{z - \zeta_1}\right)^{n_1}\right]^k - 1\right| \\
&= |R(z)|\left|\left[\binom{k}{0} - \binom{k}{1}\left(\frac{\zeta - \zeta_1}{z - \zeta_1}\right)^{n_1} + \ldots\right] - 1\right| \\
&\leq M\left[\binom{k}{1}\left(\frac{\frac{1}{2}\rho}{\rho}\right)^{n_1} + \ldots\right] \\
&< M\frac{1}{2^{n_1}}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\right] \\
&< M\frac{2^k}{2^{n_1}}
\end{aligned}$$

et ce, pour tout $z \in K$, où

$$\boxed{M = \max_{z \in K}|R(z)|.}$$

En choisissant n_1 suffisamment grand, on obtient

$$\boxed{|R_1(z) - R(z)| < \frac{\epsilon}{m},} \qquad (z \in K).$$

On répète cette procédure et ainsi on obtient, à la m^{ième} étape, la fonction rationnelle que nous désirions :

$$\boxed{\tilde{R}(z) = R_m(z).}$$

□

Remarque 2.3.1. *La preuve présentée pour ce théorème est basée sur un raisonnement de type constructif, c'est-à-dire qu'elle nous donne les moyens de littéralement construire la dite fonction dont le pôle est relocalisé et qui différera de la fonction rationnelle initiale d'une quantité négligeable.*

Lorsque j'ai lu pour la première fois une justification de cette technique, ce fut dans le livre de Gaier [5]*. Ce dernier donne très peu de détails dans sa preuve ; entre autres, il omet de mentionner le fait qu'il utilise un développement en série de Laurent de la fonction rationnelle afin de déplacer le pôle de cette dernière.*

En fait il argue comme suit : "...Puisque $\frac{1}{z-\zeta_0}$ *est holomorphe dans* $\{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta_0| \geq \delta\} \cup \{\infty\}$*, il existe, pour chaque* $\epsilon > 0$*, un polynôme* $\tilde{P}$ *tel que*

$$\boxed{\left|\frac{1}{z-\zeta_0} - \frac{\tilde{P}(z)}{z-\zeta_1}\right| < \epsilon,} \qquad pour\{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta_0| \geq \delta\} \ldots \text{''}.$$ [6]

Alors puisque $\{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta_0| \geq \delta\} \cup \{\infty\}$ *est compact j'ai présumé qu'il voulait utiliser le théorème de Runge afin d'obtenir une nouvelle fonction rationnelle approximant la fonction d'origine. C'est effectivement possible à l'aide de cette méthode mais la difficulté avec cette approche, qui contraste avec la méthode présentée plus haut par le fait qu'elle nous donne un théorème d'existence alors que la méthode utilisant le développement en série de Laurent nous permet d'obtenir une expression explicite de la fonction recherchée, est qu'à première vue, nous n'avons aucun contrôle sur l'endroit où aboutira le nouveau pôle, à part le fait qu'il sera dans le complémentaire de* $\{z \in \mathbb{C}; |z-\zeta_0| \geq \delta\} \cup \{\infty\}$*, c'est-à-dire dans* $D(\zeta_0, \delta)$.

J'ai cherché à remédier à cette objection. Pour ce faire, je suis retourné à la source de mon raisonnement : la preuve du théorème de Runge. Cette preuve s'articule principalement sur la construction d'une grille qui recourvre l'ouvert U *contenant* K*. On se souviendra qu'à la fin du processus, après avoir éliminé les éléments de la grille ayant une intersection non-nulle avec le compact* K*, on obtient de cette dernière, un chemin fermé* $\Gamma \subset \Omega \setminus K$*. Ce qui est important de se rappeler c'est que les pôles de la fonction rationnelle que l'on obtient à l'aide de cette construction seront sur* $\Gamma \subset K^c$*. Par conséquent, si le grillage*

---

[6] δ a la même signification que dans notre preuve : il représente la distance entre γ et K.

est suffisamment fin, c'est-à-dire que si la distance entre les droites horizontales et verticales est petite et que nous choisissons δ également petit, nous avons un certain contrôle sur l'endroit où aboutiront les pôles de la fonction rationnelle que nous obtiendrons.

En utilisant une grille plus fine et en choisissant un δ plus petit, nous introduisons par contre une nouvelle difficulté. En effet, à l'aide du procédé que nous venons de décrire, nous arrivons à avoir un certain contrôle sur l'emplacement où aboutiront les pôles et c'est là le problème : par cette méthode nous introduisons de nouveau pôles ! Plus la grille sera fine, plus δ sera choisi petit, plus il y aura de pôles. L'élément qui m'a échappé était la raison, le but d'introduire une telle technique. L'objectif est de déplacer les pôles afin de s'en débarasser ! Lorsque l'on invoque le théorème de Runge plutôt que d'utiliser le développement en série de Laurent on aggrave la situation, on ne l'améliore pas ! Donc, il est possible, théoriquement, de déplacer les pôles en utilisant l'argument d'existence plutôt que l'approche constructive mais dans les faits cette approche n'est d'aucune utilité puisqu'au moyen de cette méthode on introduit également de nouveaux pôles.

À la fin de cette section nous présenterons un corollaire au théorème de Runge (2.2.1) et ce corollaire illustrera avec clarté l'utilité de pouvoir déplacer les pôles des fonctions rationnelles lorsque l'on fait de l'approximation. Dans ce corollaire, l'expression "se débarasser des pôles" prend tout son sens et par conséquent, consacre la nullité de mon approche !

Nous allons maintenant appliquer ce résultat au théorème de Runge afin de déplacer les pôles de la fonction rationnelle

$$\boxed{R(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{z - \zeta_j}.}$$

Les pôles de $R(z)$, c'est-à-dire les points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$, étaient tous situés sur le chemin fermé $\Gamma \subset \Omega \setminus K$. Or, le lemme précédent nous dit que ces pôles peuvent être déplacés aux points $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \ldots, \zeta_N^*$ dans la mesure où ζ_j et ζ_j^* appartiennent à la même composante de K^c pour chaque j.

Donc pour chaque j, il existe un polynôme Q_j tel que

$$\boxed{\left|\frac{a_j}{z-\zeta_j} - Q_j\left(\frac{1}{z-\zeta_j^*}\right)\right| < \frac{\epsilon}{2^j},} \qquad (z \in K).$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle fonction rationnelle

$$\boxed{R^*(z) = \sum_{j=1}^{N} Q_j\left(\frac{1}{z-\zeta_j^*}\right),}$$

telle que la relation suivante est vérifiée, pour tout $z \in K$:

$$\begin{aligned} |f(z) - R^*(z)| &= |f(z) - R(z) + R(z) - R^*(z)| \\ &\leq |f(z) - R(z)| + |R(z) - R^*(z)| \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &= 2\epsilon. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Par conséquent, R^*, comme R, approxime la fonction f uniformément sur K. Les pôles de R^* sont, quant à eux, situés en $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \ldots, \zeta_N^*$.

Il est pour le moins intéressant de voir que l'emplacement précis des pôles de la fonction réalisant l'approximation, situés dans le complémentaire de l'ensemble d'approximation K, importe peu ; seules les composantes de K^c où ils se trouvent sont fixées.

Ce résultat permet, dans certaines situations, d'obtenir une fonction rationnelle ayant une fome particulièrement simple. En effet, lorsque le complémentaire de l'ensemble compact $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ est connexe, il est alors possible de relier chacun des pôles de la fonction R au point $z = \infty$. Nous obtenons alors une fonction rationnelle R^* dont la seule singularité soit localisée au point $z = \infty$, c'est-à-dire un polynôme ! Nous énonçons ce résultat formellement sous forme de corollaire au théorème de Runge :

Corollaire 2.3.1 (Runge). *Soit $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ un compact tel que K^c soit connexe. Si f est une fonction holomorphe sur K alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme P tel que*

$$\boxed{|f(z) - P(z)| < \epsilon, \qquad (z \in K).}$$

2.4. Le fromage suisse d'Alice Roth

Nous allons présenter dans cette section quelques faits saillants de l'histoire de l'approximation rationnelle du siècle dernier. Ce bref survol nous mènera naturellement aux recherches de Alice Roth dans ce domaine des mathématiques. Plus particulièrement nous faisons référence au célèbre contre-exemple imaginé par cette grande mathématicienne et qui porte aujourd'hui son nom : "le Fromage suisse de Roth." Les faits relatés dans cette section ayant trait à l'histoire de l'approximation rationnelle ont comme source l'article très bien documenté paru dans la revue *The Mathematical Intelligencer* et conjointement écrit par Daepp, Gauthier, Gorkin et Schmieder [4].

Comme nous le mentionnions au début de ce chapitre, le plus célèbre théorème d'approximation polynomiale est sans aucun doute le théorème de Weierstrass (1885) qui affirme que sur un intervalle fermé, borné de la droite réelle toute fonction continue peut être approximée uniformément par des polynômes. En 1926, Joseph L. Walsh démontre que, dans le théorème de Weierstrass, on peut remplacer l'intervalle fermé par n'importe quel arc de Jordan compact (image d'un intervalle compact par un homéomorphisme). En 1927, Carleman généralise le résultat de Walsh et par conséquent, celui de Weierstrass. Carleman affirma que sur un arc de Jordan non-borné, toute fonction continue peut être approximée, uniformément, par des fonctions entières. Un cas particulier du théorème de Carleman est que toute fonction continue sur la droite réelle peut être approximée, uniformément, par des fonctions entières. Il semble que ce cas particulier soit en fait le seul cas que Carleman ait prouvé. Il laissa le fardeau de la preuve du cas général au soin du lecteur !

Nous venons de voir que, sur un arc de Jordan compact, toute fonction continue peut être approximée, de manière uniforme, par des polynômes. Nous avons également vu que l'approximation polynomiale uniforme est impossible sur une courbe qui serait l'image homéomorphe d'un cercle[7]. Dans le même article où il

[7]Nous verrons dans la prochaine section la raison qui fait que l'approximation uniforme par un polynôme est impossible sur de telles courbes. On considérera alors un polynôme comme une fraction rationnelle dont la seule singularité est au point $z = \infty$.

démontre qu'une fonction continue peut être approximée uniformément sur un arc de Jordan par des polynômes, Walsh démontre qu'on peut approximer des fonctions continues, sur des courbes de Jordan, par des fonctions rationnelles.

En 1931 Friedrich Hartogs et Arthur Rosenthal ont établi le résultat suivant : *Si une fonction f est continue dans un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ de mesure de Lebesgue zéro, alors elle peut être approximée par des fonctions rationnelles.* C'est dans un tel contexte que le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ portant le nom de Fromage suisse, élaboré par Alice Roth et que nous allons décrire à l'instant, prend toute son importance.

En effet le résultat établi par Hartog et Rosenthal laisse présager la possibilité d'approximer les fonctions continues sur des compacts arbitraires par des fonctions rationnelles. La chose qui semble la plus naturelle à faire afin de faire lumière sur cette conjecture serait d'étudier les ensembles sans points intérieurs et de mesure positive. C'est exactement ce que Roth fit lorsqu'elle élabora le fameux contre-exemple du "Fromage suisse". On entend par ce dernier un sous-ensemble compact K du plan complexe possédant une infinité de trous, ce qui entraine que $K^c = \mathbb{C} \setminus K$ a une infinité de composantes. Ce type de compact est unique en son genre puisqu'il se trouve à être le seul compact pour lequel il soit possible qu'on ne puisse réaliser l'approximation rationnelle de manière uniforme, c'est-à-dire le seul compact K où il peut arriver que $R(K) \neq A(K)$.

Voici en quoi consiste le "Fromage suisse" construit par Roth. On pose $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $\triangle_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| < r_j\}$ où $\overline{\triangle}_j \subset D \quad j = 1, 2, \ldots$. Les $\triangle_j$ sont en quantité dénombrable. Ce sont des disques ouverts avec les propriétés suivantes :

(1) Les $\overline{\triangle}_j$ sont mutuellement disjoints

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} r_j < 1$

(3) $\overline{D} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \triangle_j$ ne contient aucun disque.

Il y a plus d'une façon de choisir les $\triangle_j$. Le résultat de cette construction est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ suivant :

$$\boxed{K = \overline{D} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \triangle_j,}$$

qui est un compact. Appartiennent à K les frontières de chacun des disques :

$$\boxed{\partial D \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \partial \Delta_j \right) \subset K,}$$

de plus, comme conséquence immédiate de la propriété (3) nous avons $K^0 = \emptyset$, c'est-à-dire que K ne possède pas de point intérieur.

Adoptons comme convention que si $E \subset \mathbb{C}$, alors on entendera par $M(E)$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble E. Puisque les Δ_j sont en quantité dénombrable, on peut faire en sorte que, si les rayons r_j des disques sont choisis suffisamment petits, on aura que la mesure de Lebesgue de K sera arbitrairement près de la valeur π. En effet, si $\epsilon > 0$ est donné posons, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $r_j = \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi 2^j}}$, nous déterminons ensuite la mesure de K en soustrayant de la mesure de la surface du disque, la mesure de la surface des trous :

$$\begin{aligned} M(K) = M(D) - M\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j \right) &= M(D) - \sum_{j=1}^{\infty} M(\Delta_j) \\ &= \pi - \sum_{j=1}^{\infty} \pi r_j^2 \\ &= \pi - \sum_{j=1}^{\infty} \pi \left(\frac{\epsilon}{\pi 2^j} \right) \\ &= \pi - \epsilon. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

L'égalité 2.4.1 ainsi que la construction qui précède démontre que quelque soit $\epsilon > 0$, nous pouvons construire un compact, qui dépendra de ϵ, et que nous noterons par conséquent K_ϵ, tel que sa mesure de Lebesgue diffère de la mesure du disque unité par une quantité moindre que ϵ, sans pour autant qu'il ne possède de points intérieurs.

Comme nous l'avons mentionné au début de cette section, le compact que nous venons de décrire à l'instant est un exemple d'un compact où l'approximation rationnelle uniforme peut échouer. En effet, le problème avec le compact construit par Roth est que le complément de ce dernier possède une infinité de composantes. On sait que $R(K) = A(K)$ si K^c possède un nombre fini de composantes ; un

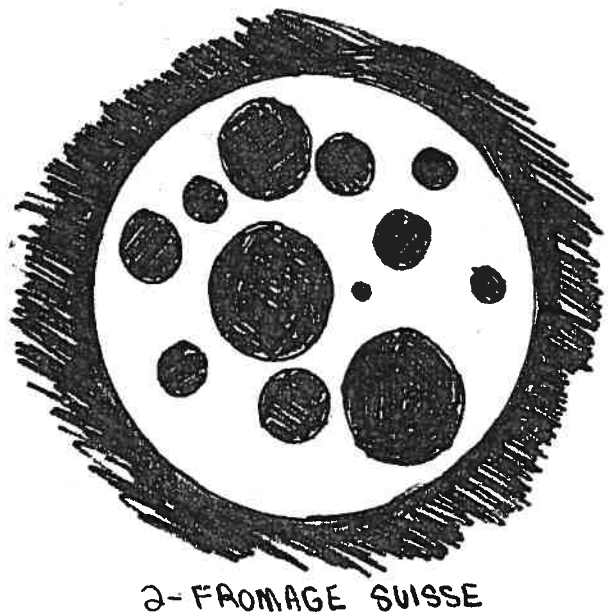

FIG. 2.4.1. Fromage suisse

résultat qui est une conséquence d'un théorème de Mergelyan.[8] L'exemple qui suit illustre le fait que l'approximation rationnelle peut échouer sur des compacts de type "Fromage suisse".

Exemple 2.4.1. *Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue sur un compact K tel que décrit plus haut. Supposons qu'il existe une fonction rationnelle R avec pôles dans K^c réalisant l'approximation uniforme de f sur K ; cette hypothèse implique que si $\epsilon > 0$ est arbitraire, alors il existe une fonction rationnelle R, avec pôles dans K^c telle que $\|f - R\|_K < \epsilon$. Le théorème de Cauchy appliqué à R implique que*

$$\boxed{\int_{\partial D} R(z)dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial \triangle_j} R(z)dz.} \tag{2.4.2}$$

Puisque R est une fonction rationnelle, elle possède un nombre fini de pôles et par conséquent, le membre de droite de 2.4.2 ne peut posséder qu'un nombre fini de termes différents de zéro. Alors si l'approximation uniforme sur K de la fonction $f \in A(K)$ est possible par des fonctions rationnelles avec pôles dans K^c il est

[8] [5] p.119, voir le corollaire suivant le théorème 4.

juste d'écrire :

$$\left|\int_{\partial D} f(z)dz - \sum_{j_k=1}^{N} \int_{\partial \triangle_{j_k}} f(z)dz\right| =$$

(Les indices j_k correspondent aux cercles à l'intérieur desquels on trouve un pôle de la fonction R.)

$$\begin{aligned}
&= \left|\int_{\partial D} [f(z) - R(z)]dz - \sum_{j_k=1}^{N} \int_{\partial \triangle_{j_k}} [f(z) - R(z)]dz\right| \\
&\leq \left|\int_{\partial D} [f(z) - R(z)]dz\right| + \left|\sum_{j_k=1}^{N} \int_{\partial \triangle_{j_k}} [f(z) - R(z)]dz\right| \\
&\leq \int_{\partial D} |f(z) - R(z)||dz| + \sum_{j_k=1}^{N} \int_{\partial \triangle_{j_k}} |f(z) - R(z)||dz| \\
&\leq \int_{\partial D} \|f - R\||dz| + \sum_{j_k=1}^{N} \int_{\partial \triangle_{j_k}} \|f - R\||dz| \\
&= \|f - R\| \left(2\pi r_D + \sum_{j_k=1}^{N} 2\pi r_{j_k}\right) \\
&= 2\pi\|f - R\| \left(1 + \sum_{j_k=1}^{N} r_{j_k}\right) \\
&< 4\pi\|f - R\| \\
&< 4\pi\epsilon.
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que si f peut être approximée uniformément sur K par des fonctions rationnelles alors,

$$\boxed{\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial \triangle_j} f(z)dz.} \tag{2.4.3}$$

Considérons maintenant la fonction $f(z) = \frac{|z|}{z} = e^{-i\theta}$ où $z = re^{i\theta}$ est un point de K. On peut supposer que $z = 0$ n'est pas un point de K. Cette fonction est continue sur K. L'identité 2.4.3 nous donne, pour le membre de gauche $2\pi i$ tandis que le membre de droite est, en valeur absolue, moindre que 2π.

Cette contradiction découle du fait que nous ayons présumé l'approximation rationnelle uniforme de fonctions continues réalisable sur le "Fromage suisse" de Roth. Nous sommes donc forcés de rejeter cette hypothèse.

2.5. Emplacement des pôles

Nous avons vu que l'approximation à l'aide de fonctions rationnelles nous permettait de faire plus que lorsqu'on se restreint à utiliser des polynômes comme outil d'investigation. C'est du moins le cas pour certains compacts. En effet, il existe des compacts pour lesquels l'approximation uniforme par des polynômes est carrément impossible.

Le **théorème de Runge** nous assure de la possibilité d'approximer (de manière uniforme) toute fonction holomorphe sur un compact K par des fonctions rationnelles avec pôles dans $K^c = \mathbb{C} \setminus K$. Dans le cours de cette étude, il fut question de la possibilité de déplacer les pôles de la fonction rationnelle R réalisant l'approximation, à l'intérieur d'une même composante de K^c, sans toutefois affecter la qualité de l'approximation de la fonction qu'on tente d'approcher.

Il serait intéressant de déterminer dans quelle mesure nous pouvons déplacer les pôles de la fonction R. De quelle latitude disposons-nous lorsqu'un compact $K \subset \mathbb{C}$ nous est donné, ainsi qu'une fonction f, holomorphe sur ce dernier, dans le choix de l'emplacement des pôles de la fonction rationnelle R approximant f, mis à part le fait qu'ils sont situés dans K^c ?

Afin de répondre à cette question, nous allons scruter la preuve du **théorème de Runge** pour essayer de déterminer la relation entre le choix de l'emplacement des pôles (choix si il y a) et la possibilité d'approximer uniformément sur le compact. Peut être existe-t-il un lien entre l'emplacement des pôles de R et la précision exigée de l'approximation, autrement dit existe-il une corrélation entre la localisation des pôles dans K^c et $\epsilon > 0$?

Les hypothèses du **théorème de Runge** sont les suivantes : nous avons un compact K, une fonction f, holomorphe sur K et un nombre positif ϵ. On suppose $f \neq$constante car ce cas est trivial ; nous n'avons pas besoin du théorème de Runge pour obtenir une fonction rationnelle approximant f puisque dans ce cas,

f est un polynôme (de degré zéro), donc triviallement une fonction rationnelle. Considérons $\mathcal{L}$ une composante du complémentaire de K, c'est-à-dire que $\mathcal{L} \subset K^c$. La preuve du **théorème de Runge** requiert l'utilisation d'une courbe $\Gamma \subset \Omega \setminus K$ dont l'existence fut établie dans le lemme sur la **formule de Cauchy généralisée** (lemme 2.2.1).

Une des conséquences de la construction utilisée dans la preuve de ce théorème est que $\Gamma \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. L'idée de la preuve du **théorème de Runge** était d'approximer l'intégrale

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,}$$

où $z \in K$, par la somme de Riemann :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} d\zeta,}$$

où $\zeta_j \in \Gamma_j \subset \Gamma = \cup_{j=1}^{N} \Gamma_j$. Si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors il existera un j, disons $j = j_0$ tel que $\Gamma_{j_0} \subset \mathcal{L}$ ce qui implique que $\zeta_{j_0} \in \mathcal{L}$. Mais alors la fonction rationnelle

$$\boxed{R(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} d\zeta,}$$

possède un pôle en $z = \zeta_{j_0} \in \mathcal{L}$. Une façon de se convaincre de l'impact du raffinement de l'approximation sur l'accroissement du nombre de pôles de la fonction rationnelle R est de considérer l'expression suivante apparaissant dans la majoration du module de la différence entre la fonction f et la somme de Riemann approximant cette dernière :

$$\boxed{\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta')}{\zeta' - z} \right| < \epsilon'.}$$

Comme conséquence du raffinement de l'approximation, qui se traduit par une diminution de ϵ', il est clair à la lumière de cette expression qu'elle forcera un rapprochement des ζ' et pour les rapprocher une fois Γ donnée, il est nécéssaire d'en augmenter le nombre. Mais encore une fois, ces points correspondent aux pôles de la fonction $R(z)$. Donc leur nombre augmentera et ce, à l'intérieur de chacune des composantes $\mathcal{L} \subset K^c$.

Donc en résumé, si on exige de pouvoir approximer une certaine fonction de manière uniforme sur un compact K donné, nous devrons permettre la possibilité que la fonction R réalisant l'approximation ait des pôles dans chaque composante $\mathcal{L}$ du complémentaire de K et également, leur nombre de croître proportionnellement avec la précision exigée, c'est-à-dire, en proportion inverse de la marge d'erreur tolérée(représenté par $\epsilon > 0$).

2.6. Lemme de fusion de Roth

Le lemme que nous allons présenter dans cette section est également un résultat de l'approximation rationnelle mais il a ceci de particulier que les conséquences qu'il engendre transcendent l'objet d'investigation de ce chapitre qui est l'approximation rationnelle sur des compacts. En effet, le **lemme de fusion de Roth** permet de faire la jonction entre l'approximation faite sur des sous-ensembles bornés du plan complexe que sont les compacts et une généralisation de la théorie de l'approximation que nous introduirons au chapitre suivant ; soit l'approximation de fonctions lorsque ces dernières sont définies sur des sous-ensembles non-bornés du plan complexe.

Énoncé de manière informelle le **lemme de fusion** nous dit que si nous avons deux compacts disjoints, ainsi qu'un troisième compact ayant une intersection non-vide avec chacun des deux premiers[9] (le troisième compact faisant office de pont entre les deux premiers), et que sur ce dernier nous avons définies deux fonctions rationnelles qui sont relativement près l'une de l'autre (le module de leur différence est petit), et que de plus, chacune d'entre elles se prolonge sur les deux compacts initiaux qui sont disjoints, alors le lemme affirme en substance qu'il existe une troisième fonction rationnelle qui approxime les deux premières sur le compact de jonction et qui de plus, approxime une des deux fonctions rationnelles sur un des deux compacts initiaux, et approxime l'autre fonction rationnelle sur l'autre compact inital. La preuve de cet important lemme utilise à un certain point

[9]Il est important de prendre note que le *lemme de fusion* peut être déduit du théorème de Runge dans le cas où le troisième compact a une intersection vide avec l'un des deux premiers.

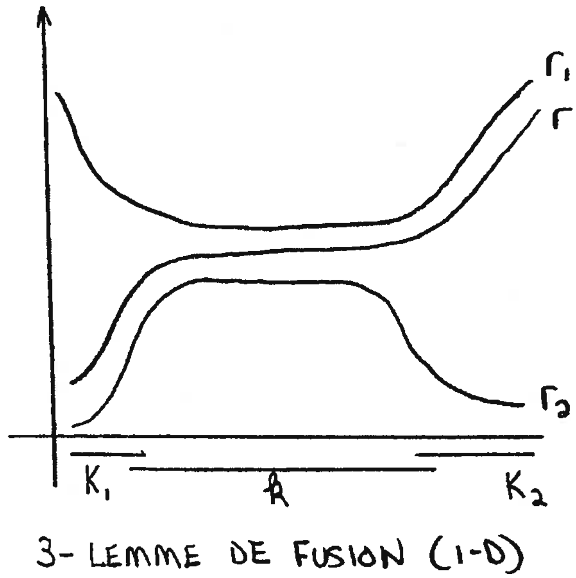

FIG. 2.6.1. Lemme de fusion 1

une formule de représentation des fonctions continûment différentiables dans le plan dite **Formule de Pompeiu** dont voici l'énoncé :

Lemme 2.6.1 (Formule de Pompeiu). *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction continûment différentiable à support compact. Si on définit l'opérateur différentiel $\overline{\partial}$ comme suit :*

$$\boxed{\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),}$$

alors nous avons la représentation suivante, où $\zeta = \xi + i\eta$, pour la fonction f, valide pour tout $z \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{R^2} \frac{(\overline{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta.} \tag{2.6.1}$$

DÉMONSTRATION. On pose $\zeta = z + re^{i\theta}$ où $z \in \mathbb{R}^2$ est donné. On obtient $f(\zeta) = f(z + re^{i\theta}) = \phi(r, \theta)$. Ensuite, on applique la dérivation en chaîne afin d'obtenir une expression pour $\overline{\partial} f$ en terme des variables r et θ, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\phi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(r,\theta) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + i\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\left(\frac{-y}{r^2}\right) + i\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{y}{r} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{r^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} + i\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\cdot\frac{iy}{r^2} + \frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{iy}{r} + i\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{r^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\left(\frac{x+iy}{r}\right) + \frac{i}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\left(\frac{x+iy}{r}\right)\right] \\
&= \frac{e^{i\theta}}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{i}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right].
\end{aligned}$$

Le membre de droite de l'équation 2.6.1 se représente donc comme la limite, lorsque $\epsilon \to 0$ de

$$\boxed{-\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)d\theta dr.} \tag{2.6.2}$$

Pour chaque $r > 0$, ϕ est une fonction périodique de période 2π, ce qui implique que l'intégrale de $\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$ sera égale à zéro et 2.6.2 devient :

$$\boxed{-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial r}dr = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\phi(\epsilon,\theta)d\theta.}$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, $\phi(\epsilon,\theta) \to f(z)$ de manière uniforme ce qui donne 2.6.1. $\square$

Nous pouvons maintenant présenter et justifier le **lemme de fusion de Roth**. Il nous permettera, dans le prochain chapitre, d'obtenir un résultat essentiel comme moyen d'investigation de la théorie de l'approximation sur les domaines non-bornés, également dû à Alice Roth, soit le **théorème de localisation de Roth**.

Lemme 2.6.2 (Lemme de fusion de Roth, 1976). *Soit K_1, K_2 et k des compacts de $\overline{\mathbb{C}}$ tels que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Il existe alors une constante A, dépendant seulement de K_1 et de K_2 telle que si r_1 et r_2 sont deux fonctions rationnelles pour lesquels*

$$\boxed{|r_1(z) - r_2(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in k),$$

existe alors une troisième fonction rationnelle r telle que

$$\boxed{|r(z) - r_1(z)| < A\epsilon,} \qquad (z \in K_1 \cup k)$$

et

$$\boxed{|r(z) - r_2(z)| < A\epsilon,} \qquad (z \in K_2 \cup k).$$

Remarque 2.6.1. *Aucune hypothèse n'est faite quant à l'emplacement des pôles.*

Remarque 2.6.2. *Le lemme est une conséquence du théorème de Runge dans le cas où $K_1 \cap k = \emptyset$ ou bien $K_2 \cap k = \emptyset$. En effet, supposons que $K_1 \cap k = \emptyset$. Alors posons,*

$$\boxed{f(z) = \begin{cases} r_1(z), & (z \in K_1), \\ r_2(z), & (z \in K_2 \cup k). \end{cases}}$$

Posons H_1 la somme de la partie principale de r_1 sur K_1 et H_2 la somme de la partie principale de r_2 sur $K_2 \cup k$. Alors $f - H_1 - H_2$ est holomorphe sur $K_1 \cup K_2 \cup k$ et par le théorème de Runge nous avons l'existence d'une fonction rationnelle R telle que

$$\boxed{|f(z) - H_1(z) - H_2(z) - R(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in K_1 \cup K_2 \cup k).$$

Le théorème est vérifié si on pose $r = H_1 + H_2 + R$ et $A = 2$. Par conséquent seul le cas où $K_1 \cap k \neq \emptyset$ et $K_2 \cap k \neq \emptyset$ sera traité.

Démonstration. Il suffit de **considérer le cas où r_2=0** car la preuve du cas général découle de celui-ci en posant $\rho_1 = r_1 - r_2$, $\rho_2 = 0$. Il existe alors une fonction rationnelle ρ telle que

$$|\rho - \rho_1| < A\epsilon \quad \text{dans } K_1 \cup k \quad \text{et} \quad |\rho| < A\epsilon \quad \text{dans } K_2 \cup k,$$

ce qui veut dire que

$$|(\rho + r_2) - r_1| < A\epsilon, \qquad (K_1 \cup k),$$

$$|(\rho + r_2) - r_2| < A\epsilon, \qquad (K_2 \cup k).$$

On pose comme hypothèse que $\infty \in K_2$ et on choisit des voisinages U_1 et U_2 de K_1 et K_2 respectivement tels que $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$ et U_1, U_2 sont bornés par un nombre fini de courbes de Jordan.

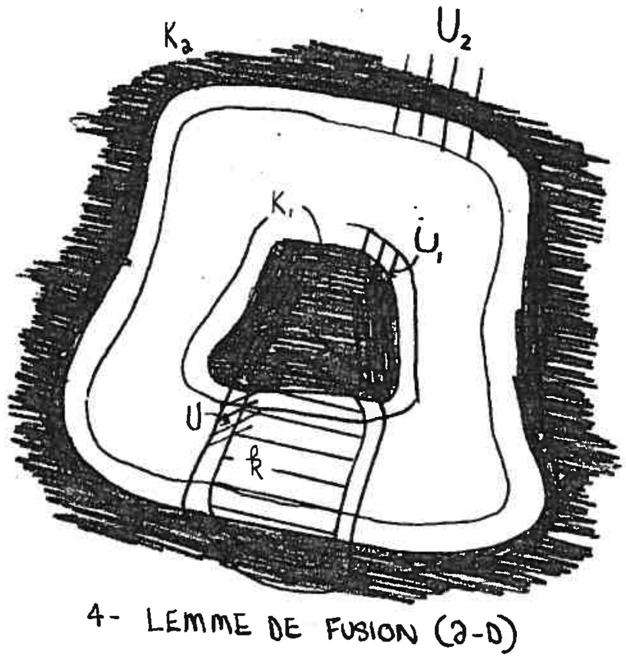

FIG. 2.6.2. Lemme de fusion 2

On pose $E := (U_1 \cup U_2)^c$. E est un sous-ensemble fermé d'un compact, l'espace topologique $\overline{\mathbb{C}}$, il est donc compact (théorème 1.5.1). Si $\zeta = z + re^{i\theta}$ alors, pour $\zeta \neq z$ et donc $r \neq 0$,[10] nous avons,

$$\boxed{\iint_E \frac{dm_\zeta}{|z-\zeta|} = \iint_E dr d\theta \leq 2\pi diam(E),}^{11} \qquad (z \in \overline{\mathbb{C}}).$$

On détermine enfin une fonction $H \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $0 \leq H(z) \leq 1$, $(z \in \mathbb{C})$ de sorte que,

$$\boxed{H(z) = \begin{cases} 1, & z \in \overline{U}_1; \\ 0, & z \in \overline{U}_2. \end{cases}}$$

[10]Dans le cas où $r = 0$ l'expression $\frac{dm_\zeta}{|z-\zeta|}$ possède une singularité isolée éliminable puisque le numérateur et le dénominateur tendent tout deux vers zéro à la même vitesse lorsque $\zeta \to z$ puisque $dm_\zeta = rdrd\theta$. Il est donc possible de prolonger $\frac{dm_\zeta}{z-\zeta}$ par continuité à l'origine.

[11]L'élément différentiel dm_ζ représente la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$ où le sous-indice indique que ζ est la variable d'intégration.

Si $z \in \mathbb{C}$ nous avons,

$$\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{1}{|\zeta - z|}|(\overline{\partial} H)(\zeta)|dm_\zeta \leq \max_E |(\overline{\partial} H)(\zeta)| \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \cdot diam\, E$$
$$< A - 2, \qquad (2.6.3)$$

où A est une constante ne dépendant que de K_1 et K_2. Par hypothèse il existe un voisinage $U \supset k$ tel que $|r_1(z)| < \epsilon$ pour $z \in U$. Nous allons maintenant **<u>construire une fonction F</u>**, méromorphe sur $U_1 \cup U_2 \cup U$. On pose $f = r_1$ pour $\overline{U} \cap E$ et on prolonge cette fonction, continûment sur E intégralement. Par le théorème de Tietze nous avons $|f(z)| < \epsilon$ pour tout $z \in E$. Sur $E^c = U_1 \cup U_2$ on pose $f = r_1$. Si $P = \{z \in U_1 \cup U_2 : z \,\text{est un pôle de}\, r_1\}$ alors f est continue par morceau dans $\mathbb{C} \setminus P$. À partir de cette fonction f on définit, pour $z \in \mathbb{C} \setminus P$,

$$F(z) := \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}(\overline{\partial} H)(\zeta)dm_\zeta \qquad (2.6.4)$$
$$= \frac{1}{\pi}\iint_E \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}(\overline{\partial} H)(\zeta)dm_\zeta$$
$$= \frac{1}{\pi}\iint_E \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}(\overline{\partial} H)(\zeta)dm_\zeta - f(z) \cdot \frac{1}{\pi}\iint_E \frac{1}{\zeta - z}(\overline{\partial} H)(\zeta)dm_\zeta$$
$$= g(z) + f(z)H(z).$$

En ce qui concerne la fonction g on remarque qu'elle est holomorphe dans $E^c = U_1 \cup U_2$ et par (2.6.3) nous avons

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}(\overline{\partial} H)(\zeta)dm_\zeta\right|$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\iint_E \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}|\overline{\partial}(H)(\zeta)|dm_\zeta$$
$$< \epsilon(A - 2), \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Par conséquent, la fonction F définie en 2.6.4 jouit des propriétés suivante :

- puisque $H(z) = 1$ pour $z \in U_1$, $F = f + g = r_1 + g$ est méromorphe dans U_1 et possède les mêmes pôles que r_1,
- puisque $H(z) = 0$ pour $z \in U_2$, $F = g$ est holomorphe dans U_2,

– F est holomorphe pour $z \in U$ puisque pour $z \in U$ nous avons que $f = r_1$ est rationnelle et sans pôles, ce qui entraîne que F est holomorphe dans U.

Par conséquent, mis à part un nombre fini de pôles à l'intérieur de U_1 la fonction F est holomorphe dans $U_1 \cup U_2 \cup U$.

Nous allons maintenant tenter d'**estimer la fonction F**. Pour $z \in K_1$ nous avons $F - r_1 = (H-1)r_1 + g = g$, ce qui entraîne que $|F - r_1| < \epsilon(A-2)$, $(z \in K_1)$; pour $z \in k$ nous avons $|F - r_1| \leq |r_1| + |g| < \epsilon + \epsilon(A-2)$. Par conséquent,

$$\boxed{|F(z) - r_1| < \epsilon(A-1),} \qquad (z \in K_1 \cup k). \tag{2.6.5}$$

De manière analogue on déduit que $F = g$ pour $z \in K_2$ ce qui implique que $|F(z)| < \epsilon(A-2)$, $z \in K_2$ et pour $z \in k$ nous avons $F = fH + g = r_1 H + g$ ce qui entraîne que $|F(z)| < \epsilon + \epsilon(A-2) = \epsilon(A-1)$, $z \in k$. Par conséquent,

$$\boxed{|F(z)| < \epsilon(A-1),} \qquad (z \in K_2 \cup k). \tag{2.6.6}$$

Nous allons maintenant procéder à la **construction de la fonction r**. Puisque $K_1 \cup K_2 \cup k$ est compact dans $U_1 \cup U_2 \cup U$ et que F y est holomorphe, mis à part un nombre fini de pôles, on peut utiliser le théorème de Runge appliqué à $F - \Sigma$ (où Σ est la partie principale de F sur U_1). Il en résulte une fonction rationnelle r telle que

$$\boxed{|F(z) - r(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in K_1 \cup K_2 \cup k).$$

Par l'inégalité 2.6.5 et 2.6.6 cette fonction r satisfait à

$$\boxed{|r(z) - r_1(z)| < A\epsilon,} \qquad (z \in K_1 \cup k)$$

et

$$\boxed{|r(z)| < A\epsilon,} \qquad (z \in K_2 \cup k),$$

tel qu'énoncé dans le lemme pour le cas particulier où $r_2 = 0$. □

Chapitre 3

APPROXIMATION SUR DES NON-BORNÉS

3.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est ultimement d'énoncer et prouver un théorème nous permettant d'approximer uniformément une fonction holomorphe sur un fermé non-borné du plan complexe, par des fonctions entières.

Parce que nous voulons faire l'approximation sur des non-bornés, ce projet ambitieux nous force à abandonner la topologie qui nous était familière, soit celle de l'espace topologique $\mathbb{C}$, équivalente à l'espace euclidien de dimension deux $\mathbb{R}^2$, pour considérer cette fois la topologie de

$$\boxed{\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},}$$

la compactifié par un point dite d'Alexandroff de $\mathbb{C}$. Avant de commencer l'approximation sur ce nouvel espace topologique, fondamentalement différent du plan complexe, il nous semble opportun d'y consacrer la prochaine section, afin de s'y familiariser, pour ensuite vouer le reste du chapitre à l'objectif énoncé plus haut, soit l'obtention d'un théorème d'approximation pour les fonctions holomorphes définies sur des sous-ensembles non-bornés.

Ce projet d'envergure nécessitera une approche par étape ; dans un premier temps nous allons généraliser le **théorème de Runge** présenté au chapitre précédent pour des ensembles compacts à des sous-ensembles fermés du plan complexe. Dans ce cas, l'approximation se fera au moyen de fonctions méromorphes plutôt que des fonctions rationnelles. Le théorème de **Localisation de Roth** introduit à la troisième section de ce chapitre nous permettera cette généralisation. Dans un deuxième temps, nous introduirons un théorème nous permettant d'approximer des fonctions méromorphes à l'aide de fonctions entières.

Le théorème convoité se trouve donc à être en fait la conséquence de l'usage combiné de deux théorèmes à un cas particulier, comme il sera détaillé par la suite.

3.2. Topologie de $\overline{\mathbb{C}}$

$\overline{\mathbb{C}}$ est la compactification par un point de l'espace topologique $\mathbb{C}$, le plan complexe, par l'ajout du point à l'infini :

$$\boxed{\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.}$$

Définition 3.2.1. *Un sous-ensemble Ω de $\overline{\mathbb{C}}$ est dit ouvert si il est un ouvert de $\mathbb{C}$ ou bien, si $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ où K est un compact de $\mathbb{C}$. Muni de cette topologie, $\overline{\mathbb{C}}$ est lui-même un compact parfois nommé la sphère de Riemann.*

Interviendra au cours de notre travail la notion d'accessibilité du point à l'infini, à partir d'un domain du plan complexe. Nous allons introduire ici une définition de ce concept dont la source est un article de Gauthier, Grothman et Hengartner **[9]**, article qui fut l'inspiration première de ce mémoire. Nous aurons à composer avec l'idée d'accessibilité du point à l'infini ultérieurement dans ce travail.

Définition 3.2.2 (Accessibilité du point à l'infini.). *Le point à l'infini est accessible d'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ si il existe un chemin continu λ :$[0, \infty) \to \Omega$, tel que*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty.}$$

À première vue, une condition équivalente à celle d'accessibilité du point $z = \infty$ d'un domaine Ω serait que ce dernier soit non-borné. En effet, on pourrait penser que si, pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe un $z \in \Omega$ tel que $|z| > M$, ce qui signifie que notre domaine Ω contient des nombres complexes de modules arbitrairement grand, alors il est possible, de Ω, d'accéder au point à l'infini. La réalité, malheureusement, n'est pas aussi simple ! Considérez l'exemple suivant :

Exemple 3.2.1 (le gant d'Arakelyan). *Soit* $F = \{z = x + iy \mid -1 \leq x < \infty,\ y = 0\} \cup \{z = x + iy \mid x = (\frac{1}{y})|\sin(\frac{1}{y})|,\ 0 < y \leq \frac{1}{\pi}\} \cup \{z = x + iy \mid -1 \leq x \leq 0,\ y = \frac{1}{\pi}\} \cup \{z = x + iy \mid x = -1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\pi}\}$. *Cet ensemble porte le nom de gant d'Arakelyan. Si on pose* $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ *alors* Ω *est un espace topologique connexe ; il n'est cependant pas localement connexe.*

Dans cet exemple, les doigts du gant, commençant en $y = \frac{1}{\pi}$, sont parallèles à l'axe des x, ils se succèdent et leur longueur augmente progressivement, sans borne, à mesure que l'on s'approche de l'axe des x. Il en est ainsi pour une infinité de doigts. L'intérieur du gant est un domaine non-borné ; pour tout entier naturel arbitrairement grand il est possible, en s'approchant suffisament près de l'axe des x, de choisir un doigt dont la longueur excèdera la valeur de cet entier préalablement choisi. Mais une fois engagé dans ce doigt, vous êtes coincé ! Rappelez-vous que vous êtes en train d'essayer d'accéder à l'infini, vous vous déplacez donc sur un chemin qui est une application continue. Peu importe la longueur du doigt, aussi grande soit-elle, elle demeure finie : vous arriverez au bout, tôt ou tard, et ne pourrez donc accéder à l'infini ! Il va sans dire qu'il sera toujours possible, une fois engagé dans un doigt, de faire marche arrière afin de sortir du doigt et en choisir un plus long, cette alterniative ne résout en rien le problème ; elle vous permettera tout au plus d'accéder à un doigt plus long que le précédant mais ce dernier sera également de longueur finie. De plus, cette approche a le désavantage de vous forcer à revenir à votre point de départ, l'entré du gant, soit l'intervalle $0 < y \leq \frac{1}{\pi}$ et ce, à chaque fois que vous voulez changer de doigt pour en choisir un plus long.[1].

À la lumière de cet exemple, on se convainc assez facilement que, quoique nécéssaire, la condition qu'un domaine soit non-borné afin que l'infini y soit accessible, n'est certainement pas suffisante.

Il est incontestable que l'infini ne peut être accessible d'un domaine borné du plan complexe. Notre description requiert cependant un élément de raffinement afin de contourner la difficulté rencontrée avec les doigts du gant d'Arakelyan. La

[1] À ce sujet voir dans l'article de Gauthier [7], p.243 la définition de la propriété d'un ensemble de *ne pas avoir de longues îles* (..."*to have no long island*"...), cette dernière est liée à la propriété de connexité locale d'un espace topologique.

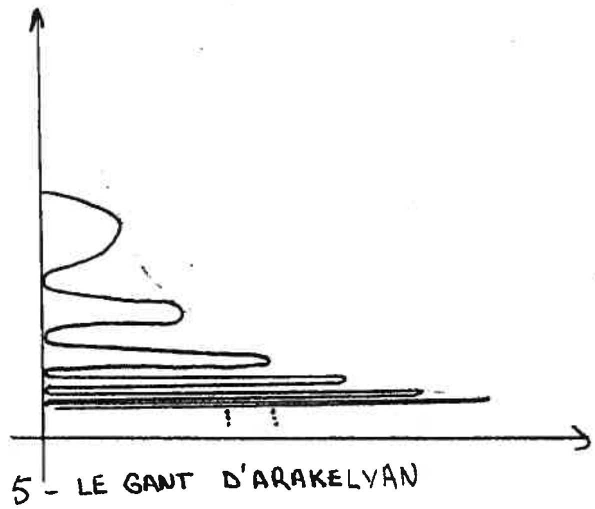

FIG. 3.2.1. Le gant d'Arakelyan

difficulté dans cet exemple réside dans le fait que le sous-espace $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ est connexe mais pas *localement connexe.*

Nous allons ensuite considérer, dans un deuxième temps, un espace topologique de la forme $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$, où encore une fois $F \subset \mathbb{C}$ est un fermé, ayant la propriété de connexité locale en chacun de ces points sans pour autant que l'infini soit accessible de $\mathbb{C}\setminus F$, illustrant le fait que cette condition n'est également pas suffisante. En effet, si F est un fermé du plan, et que, $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ est localement connexe alors, l'infini n'est pas nécéssairement accessible de $\mathbb{C}\setminus F$. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer l'exemple suivant :

Exemple 3.2.2. *Soit $F = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geq M\}$. L'ensemble F est fermé, $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ est localement connexe puisqu'il consiste en les points suivants :*

$$\boxed{\overline{\mathbb{C}}\setminus F = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < M\} \cup \{\infty\}.} \tag{3.2.1}$$

Dans cet exemple nous utilisons la définition 3.2.2 d'accessibilité du point à l'infini telle qu'énoncée dans l'article de Gauthier, Grothmann et Hengartner [**9**].

Il est clair que la première composante du membre de droite de l'égalité définissant $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$(équation 3.2.1) est localement connexe, c'est un sous-ensemble ouvert pour la topologie de $\mathbb{C}$ et donc également de $\overline{\mathbb{C}}$. Le second membre de l'union consiste en un point isolé donc, localement connexe également.

Il est par contre évident que l'on ne peut, de l'intérieur du disque $D(0, M)$ (de rayon $r = M > 0$ et centré en l'origine), se déplacer de manière continue et ce, tout en se rapprochant arbitrairement près du point à l'infini. En effet, si le point à l'infini était accessible de $D(0, M)$, nous aurions alors l'existence d'une application continue $\lambda : [0, +\infty) \to D(0, M)$ telle que

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \lambda(t) = \infty,} \tag{3.2.2}$$

ce qui est clairement impossible pour les points appartenant à $\mathbb{C} \setminus F = \{z \in \mathbb{C} : |z| < M\}$.

Il est donc impossible de se rapprocher arbitrairement près du point à l'infini, tout en se déplaçant sur un chemin continu, de l'intérieur du disque $D(0, M)$.

Ceci démontre que la connexité locale de l'ensemble $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ n'est donc pas une condition suffisante pour que l'infini soit accessible de l'ensemble $\mathbb{C} \setminus F$. Il sera démontré ultérieurement qu'une condition suffisante pour que l'infini soit accessible d'un domaine de la forme $\Omega = \mathbb{C} \setminus F$, où $F \subset \mathbb{C}$ est un fermé, est la suivante :

Si F est un fermé du plan et que $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est connexe et localement connexe, alors le point à l'infini est accessible de $\mathbb{C} \setminus F$.

Nous avons ajouté comme caractéristique additionnelle de l'ensemble $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ d'être non seulement connexe localement mais aussi connexe dans son entier. Cette modification nous est suggérée par l'observation suivante : dans l'exemple 3.2.2, l'ensemble $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, lorsque considéré par morceaux, satisfait à la propriété de connexité, c'est-à-dire pour tout point $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, il existe des voisinages connexes de z arbitrairement petits. Donc la propriété de connexité est vérifiée en chacun de ses points, c'est-à-dire localement. Mais lorsque considéré dans son entier $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ n'est pas connexe et, c'est à ce niveau que réside la difficulté dans cet exemple.

Le prochain lemme caractérise les sous-ensembles de la forme $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ localement connexe au point $z = \infty$.[2] Cette propriété est intimement liée à celle de

[2]Nous excluons ici le cas trivial rencontré précédemment (exemple 3.2.2) où le point $z = \infty$ serait un point isolé de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

l'accessibilité du point à l'infini à partir de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus F$. Pour ce qui est de la démonstration de la nécéssité de la condition du lemme, elle requiert l'utilisation du concept d'*un chemin reliant un point à l'infini* de l'intérieur d'un domaine dont la définition suit :

Définition 3.2.3 (D'un chemin reliant un point à l'infini dans $\mathbb{C}$). *On dit qu'un chemin $\gamma \subset \mathbb{C}$ commençant en $z_0 \in \mathbb{C}$ relie ce dernier à l'infini dans $\mathbb{C}$ si, pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, il existe un point de γ au-delà duquel γ ne rencontre plus jamais K. Énoncé formellement la condition stipule que si $K \subset \mathbb{C}$ est un compact arbitraire, il existe un N_K[3] $\in \mathbb{N}$ tel que si $t > N_K$ alors,*

$$\boxed{\gamma(t) \cap K = \emptyset.}$$

Cette définition exprime le fait que le chemin γ est, à partir d'un certain point, à l'extérieur de tout compact du plan complexe. Le point en question dépendra, bien entendu, du compact considéré.

Lemme 3.2.1. *Soit F un fermé du plan complexe. L'espace topologique $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est localement connexe en $z = \infty$ si, et seulement si, pour tout voisinage U de ∞ par rapport à $\overline{\mathbb{C}}$ il existe un voisinage $V \subset U$ de ∞ pour la même topologie tel que si $z \neq \infty$ est un point arbitraire de $V \setminus F$, alors il peut être relié à ∞ dans $\mathbb{C}$ par un chemin $\gamma \subset (U \setminus F)$.*

Cet important résultat est tiré du livre de Gaier [**5**]. Après que maintes tentatives à rédiger une preuve de ce lemme qui soit plus simple que ce que l'on retrouve dans [**5**] ait échouée, nous nous résignons, mû par un soucis de complétude de notre travail, à reproduire la preuve présentée dans l'ouvrage cité à titre de référence. Les multiples embûches rencontrés en tentant de produire une preuve originale n'auront été vaines puisqu'elles auront contribué à nous conscientiser au faite que ce qui nous apparaissait au départ comme une approche inutilement contre-intuitive et conséquemment lourde n'était autre finalement qu'une manifestation de la rigueur de l'auteur et par conséquent, un incontournable. Par exemple, en ce qui a trait à la nécéssité de la condition énoncée dans le lemme, si l'équivalence entre la connexité et la connexité par arcs était établie dans le cas d'ensembles

[3] L'indice K rattaché à N traduit le fait que ce dernier dépend du sous-ensemble compact K considéré.

ouverts, comme le prétendent la plupart des livres de variables complexes, il aurait alors à ce moment été facile de présenter une version beaucoup plus simple que ce que l'on retrouve dans le livre de Gaier ; malheureusement, l'exemple 3.2.1 nous fournit un contre-exemple à cet énoncé : en effet, dans cet exemple nous avons vu que Ω, en tant qu'espace topologique, est un ouvert connexe qui n'est cependant pas localement connexe ; il n'est également pas connexe par arcs.

Avant de débuté la preuve du lemme 3.2.1 nous allons présenter une deuxième version de la définition de connexité locale en un point d'un espace topologique ; la première fut introduite au chapitre 1, définition 1.4.2. La connexité locale telle que définit en 3.2.4 est plus appropriée à la preuve que nous présentons du lemme 3.2.1.

Définition 3.2.4 (Connexité locale)**.** *Un espace topologique Ω est dit localement connexe en $z \in \Omega$ si pour tout voisinage u de z il existe un ensemble connexe $\Lambda \subset u$ contenant z comme point interieur.*

DÉMONSTRATION. (Suffisance) : On suppose d'abord la condition du lemme vérifiée ; soit u un voisinage de ∞ pour la topologie de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$; ce qui veut dire qu'il existe un ouvert U de $\overline{\mathbb{C}}$ tel que $u = U \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus F) = U \setminus F$. Soit $V \subset U$ le voisinage de l'infini par rapport à $\overline{\mathbb{C}}$ ayant la propriété que chacun des points de $V \setminus F$ (mis à part le point $z = \infty$) peut être relié dans $\mathbb{C}$, par un chemin $\gamma \subset (U \setminus F)$, au point à l'infini. On pose

$$\boxed{\Lambda := \{\gamma_z \,|\, z \in (V \setminus F),\ z \neq \infty\} \cup \{\infty\};} \tag{3.2.3}$$

donc Λ se trouve à être une union de chemins reliant chaque point z de $V \setminus F$ (excluant le point $z = \infty$) à l'infini à laquelle on ajoute le point $z = \infty$.[4] Par conséquent Λ est un sous-ensemble connexe de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ et de plus,

$$\boxed{\Lambda \subset (U \setminus F) = u.} \tag{3.2.4}$$

[4]Il est fort possible qu'il existe plus d'un chemin reliant chacun de ces points à ∞ mais notre construction nécessite que nous ne choisissions qu'un seul chemin pour chaque $z \in (V \setminus F)$, $z \neq \infty$.

Nous avons également comme conséquence de cette construction que

$$\boxed{\Lambda \supset (V \setminus F) = V \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus F),} \tag{3.2.5}$$

et évidemment le membre de droite de 3.2.5 est un voisinage de ∞ pour la topologie de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

(Nécessité) : Supposons $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ localement connexe en $z = \infty$ et que U soit un voisinage de ∞ dans $\overline{\mathbb{C}}$. Il suffit de démontrer la proposition suivante : *Il existe un voisinage $V \subset U$ de ∞ tel que chaque point $z \neq \infty$ dans $V \setminus F$ peut être relié, dans $U \setminus F$, à un point arbitrairement près de ∞.*

En effet, si cette condition est vérifiée, on construit une suite de voisinages de l'infini $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que,

(1) $U_{n+1} \subset U_n$

(2) $\cap U_n = \{\infty\}$

ainsi que les voisinages connexes V_n de l'infini correspondant (dont l'existence découle [5] de l'hypothèse selon laquelle $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est localement connexe en $z = \infty$) tel que $V_{n+1} \subset V_n$, puis on relie une quantité dénombrable de chemins pour ainsi former γ se trouvant dans $U \setminus F$ et reliant, dans $\mathbb{C}$, z à l'infini.

Afin de démontrer la proposition en italique, on pose $u = U \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus F) = U \setminus F$ et on choisit un sous-ensemble $\Lambda \subset u$ connexe dans $\overline{\mathbb{C}}$ qui contient le voisinage connexe v de l'infini ($\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est localement connexe en $z = \infty$) pour la topologie de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Nous avons donc

$$\boxed{v \subset \Lambda,\ v = V \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus F) = V \setminus F.} \tag{3.2.6}$$

Pour ce voisinage $V \subset U$ de ∞ la condition en italique citée plus haut est vérifiée. On choisit alors $z \in V \setminus F$, $z \neq \infty$ et on écrit λ pour représenter la composante de

[5]En fait ce que l'hypothèse dit c'est que $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est localement connexe en $z = \infty$ et donc, par conséquent, si u est un voisinage de ∞ pour cette topologie, alors il existe un voisinage connexe $v \subset u$ de l'infini. Mais puisque $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est un sous-espace le l'espace topologique $\overline{\mathbb{C}}$, alors $u = U \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$ où U est un ouvert pour la topologie de $\overline{\mathbb{C}}$. Ce que l'hypothèse entraine c'est plutôt l'existence d'un voisinage connexe $v \subset u$ de l'infini, pour la topologie de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Ce dernier, tout comme u, peut s'écrire comme l'intersection d'un ouvert V de $\overline{\mathbb{C}}$ avec $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Donc, dire que l'existence de V est conséquence de l'hypothèse est abusif ; l'implication, comme nous venons de le voir est indirecte.

l'ouvert $U \cap (\mathbb{C} \setminus F)$ de $\mathbb{C}$ contenant z. On démontre ensuite que λ a l'infini comme point d'accumulation et établissons ainsi la validité de l'énoncé en italique.

Nous avons maintenant que

$$\boxed{U \cap (\mathbb{C} \setminus F) = \lambda \cup \rho,} \tag{3.2.7}$$

où ρ est un ouvert de $\mathbb{C}$ (la possibilité que $\rho = \emptyset$ n'est pas exclu) et où aucun point de ρ n'est un point d'accumulation de λ. On inclut à ce stade le point à l'infini et on obtient :

$$\boxed{U \setminus F = \lambda \cup \rho', \text{ où } \rho' = \rho \cup \{\infty\} \neq \emptyset;} \tag{3.2.8}$$

Le membre de gauche de 3.2.8 n'est autre que $U \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus F) = u$, λ lui est ouvert par rapport à la topologie de $\mathbb{C}$ et donc, il l'est également par rapport à la topologie de $\overline{\mathbb{C}}$ et par conséquent, par rapport à $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Si on prend ensuite l'intersection de ce dernier avec $\Lambda \subset u$ on obtient :

$$\boxed{\Lambda = (\Lambda \cap \lambda) \cup (\Lambda \cap \rho') = A \cup B,} \tag{3.2.9}$$

où A est ouvert dans Λ et $B \neq \emptyset$. Puisque Λ est connexe, A ne peut être fermé dans Λ car si il en était ainsi, $A \cup B$ serait une séparation de Λ et par conséquent, entrerait en contradiction avec notre hypothèse selon laquelle Λ était un sous-ensemble connexe de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Il découle de ce raisonnement que B contient un point d'accumulation de A et par conséquent, λ a un point d'accumulation dans $\rho' = \rho \cup \{\infty\}$. Ce point d'accumulation ne peut être dans ρ par l'identité 3.2.8 ; par conséquent, ∞ est un point d'accumulation de λ. □

Le prochain lemme a pour objectif de caractériser les sous-ensembles connexes Ω de la sphère de Riemann de la forme $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ où F est, encore une fois, un fermé du plan complexe $\mathbb{C}$.

Lemme 3.2.2. *Soit $F \subset \mathbb{C}$ un fermé. Le sous-ensemble $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ de* ***la sphère de Riemann*** *est connexe si, et seulement si, chaque composante ω de $\mathbb{C} \setminus F$ est non-bornée ou, ce qui est équivalent, possède le point $z = \infty$ comme point d'accumulation.*

Ce lemme est également tiré de Gaier **[5]**. La preuve que nous présentons est plus simple que celle qu'on trouve dans le livre car nous n'avons de considération que pour le cas particulier où l'espace topologique est $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire le cas où le point idéal est celui de $\mathbb{C}$, alors que le livre traite le cas plus général où le point idéal est celui d'un domaine quelconque (noté dans ce cas $*$ dans le livre).

DÉMONSTRATION. Nécessité. La condition énoncée dans le lemme est clairement suffisante : on sait que les composantes d'un espace topologique sont des sous-espaces connexes et disjoints tel que leur union engendre l'espace. Supposons comme hypothèse que la condition du lemme ne soit pas vérifiée c'est-à-dire, supposons que ω soit une composante bornée de Ω tout en ayant $\infty \in \Omega$. Il est donc clair que ω et $\Omega - \omega$ forment une séparation de l'espace topologique Ω. Ce dernier ne peut donc être connexe.

Pour ce qui est de la suffisance, on suppose que chaque composante ω_j de $\mathbb{C} \setminus F$ soit non-bornée. Ceci implique que chacune de ces composantes à le point $z = \infty$ comme point d'accumulation. On utilise une fois de plus le fait que les composantes de $\mathbb{C} \setminus F$ sont des sous-espaces disjoints, connexes et non-vides de ce dernier dont l'union est précisément $\mathbb{C} \setminus F$. Il est simple de démontrer, à partir de cette constatation, que

$$\boxed{\Omega = \bigcup_j \omega_j \cup \{\infty\}}$$

est effectivement connexe.

À cette fin nous allons utiliser la définition de connexité introduite dans le premier chapitre (définition 1.2.1) ainsi que le théorème 1.2.1 et prouver la connexité de Ω en démontrant qu'il ne peut exister une séparation de ce dernier.

Supposons, par contradiction, qu'une séparation de Ω existe, c'est-à-dire deux sous-ensembles disjoints, non-vides A et B de Ω telles que

$$\boxed{\Omega = A \cup B.}$$

D'après le théorème 1.2.1 aucun de ces deux sous-ensembles de Ω ne contient un point limite appartenant à l'autre sous-ensemble :

$$\boxed{\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.}$$

Pour ce qui est des composantes $\omega_j \subset \Omega$, comme elles sont des sous-ensembles connexes de ce dernier, le lemme 1.2.1 indique que ω_j est contenu, pour chaque j, ou bien entièrement dans A, ou bien entièrement dans B.

Supposons maintenant que $z = \infty$ appartient à B. Puisque $A \cup B$ est une séparation de Ω alors il existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_{j_0} \subset A$. Mais puisque ω_{j_0} par hypothèse est non bornée, elle possède le point $z = \infty$ comme point d'accumulation, en d'autres termes, $\infty \in \overline{\omega}_{j_0}$. Mais alors, puisque $\infty \in B$, ce dernier contient un point limite de A et de ce fait, entre en contradiction avec l'énoncé du théorème 1.2.1 cité précédemment. Puisque cette contradiction découle du fait que nous ayons présumé l'existence d'une séparation de Ω, cette hypothèse doit être rejetée : Ω est connexe. □

3.3. Théorème de localisation de Roth

Soit $F \subset \mathbb{C}$, un fermé du plan complexe. Le théorème de localisation[6] de Roth a pour objet de caractériser les fonctions pouvant être approximées uniformément sur F par des fonctions méromorphes dont les pôles sont situés dans F^c.

Ce théorème a le mérite de ramener le problème de l'approximation de fonctions sur un fermé quelconque par des fonctions méromorphes, à celui de l'approximation de fonctions sur un compact, par des fonctions rationnelles.

Théorème 3.3.1 (Roth, 1976). *Soit $F \subset \mathbb{C}$ un fermé et f, une fonction définie sur ce dernier. Alors f peut être approximée uniformément sur F par des fonctions méromorphes m dans $\mathbb{C}$ dont les pôles sont situés à l'extérieur de F si, et seulement si,*

$$f|_K \in R(K) \qquad \textit{pour chaque sous-ensemble compact } K \subset F. \tag{3.3.1}$$

[6]Cette terminologie découle du fait que l'ensemble F est un fermé quelconque ; il est par conséquent possible qu'il soit non-borné. Le théorème que nous présentons dans cette section lie l'approximation sur des fermés à celle faite sur des compacts. Or, les compacts de $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ sont des fermés bornés. Le théorème a donc comme conséquence de simplifier le problème d'approximation en permettant de considérer des ensembles de taille finie (des compacts) plutôt que des fermés quelconques.

Remarque 3.3.1. *La condition 3.3.1 n'est pas absolument nécéssaire afin de démontrer le théorème. La preuve présentée ici (dont la source est Gaier* [5]*), requiert la vérification de la condition (plus faible) suivante :*

$$f|_K \in R(K) \qquad \textit{pour tout } K = F \cap \overline{\Omega}_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.3.2}$$

où $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ *est une exhaustion de* $\mathbb{C}$ *par des ouverts bornés tels que,*

(1) $\Omega_n \subset \mathbb{C}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$

(2) $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1},$

(3) $\cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \mathbb{C}.$

Démonstration. Nul doute que la condition 3.3.2 soit nécessaire puisque si f peut être approximée uniformément sur F par des fonctions méromorphes m n'ayant pas de pôles dans F alors ces fonctions sont holomorphes sur K, quelque soit $K \subset F$. Le théorème de Runge nous fournit alors une fonction rationnelle R dont les pôles sont situés dans K^c et qui approxime m uniformément sur K. Par hypothèse, m approxime f uniformément sur F donc, a fortiori, sur K. Par conséquent, si $\epsilon > 0$ nous est donné, nous avons la majoration suivante pour la distance entre f et R sur K :

$$\begin{aligned} \|f - R\|_K &= \|f - m + m - R\|_K, \\ &\leq \|f - m\|_K + \|m - R\|_K \qquad (3.3.3) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \qquad (3.3.4) \\ &= \epsilon, \qquad (3.3.5) \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ étant arbitraire, 3.3.5 démontre que $f|_K \in R(K)$ et prouve ainsi la nécessité de la condition 3.3.2. Le passage de l'inégalité 3.3.3 à l'inégalité 3.3.4 utilise la condition 3.3.2 et le fait que m soit holomorphe dans F et par conséquent appartient à $R(K)$ pour chaque compact $K \subset F$.

Pour ce qui est de la suffisance, supposons que 3.3.2 soit vérifiée pour $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, une exhaution de $\mathbb{C}$ telle que décrite plus haut. Alors, $F_n := F \cap \overline{\Omega}_{n+1}$ est un sous-ensemble compact de F. Soit $\epsilon > 0$ et $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite monotone décroissante de nombres réels positifs telle que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \frac{\epsilon}{2}.}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous allons utiliser successivement le lemme de fusion de Roth en regard de l'approximation rationnelle.

On pose

$$K_n = \overline{\Omega}_n, \quad K_{n+1} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_{n+1} \quad \text{et} \quad k = F_n.$$

Soit A_n la constante A apparaissant dans l'énoncé du lemme de fusion et on suppose que la suite $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ est monotone croissante avec $1 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots$.

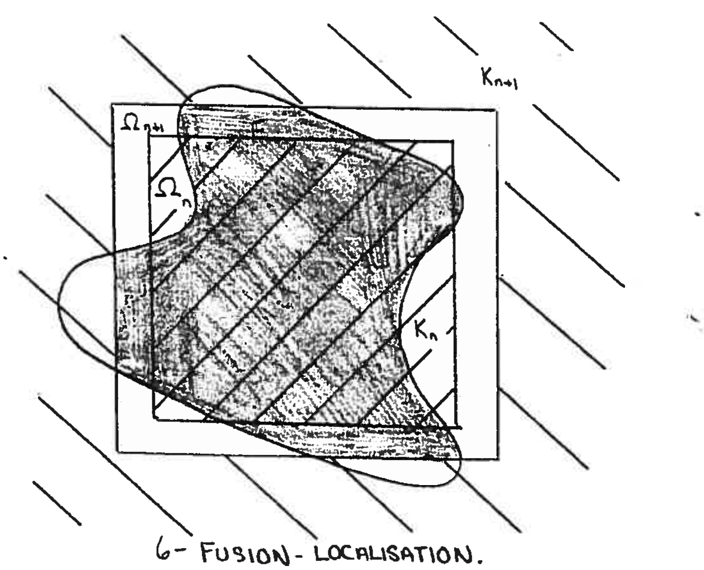

FIG. 3.3.1. Lemme fusion

Par hypothèse, nous savons que f peut être approximée, uniformément par des fonctions rationnelles sur tout compact contenu dans F, alors soit q_n une fonction rationnelle ayant cette propriété sur le compact $F_n = F \cap \overline{\Omega}_{n+1}$ se traduisant par l'inégalité suivante :

$$\boxed{|f(z) - q_n(z)| < \frac{\epsilon_n}{2A_n},} \qquad (z \in F_n); \qquad (3.3.6)$$

soit q_{n+1} une autre fonction rationnelle ayant la propriété d'approximer f uniformément mais cette fois, sur $F_{n+1} = F \cap \overline{\Omega}_{n+2}$,

$$\boxed{|f(z) - q_{n+1}(z)| < \frac{\epsilon_{n+1}}{2A_{n+1}},} \qquad (z \in F_{n+1}). \tag{3.3.7}$$

Puisque la suite $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ est monotone décroissante, et que la suite $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ est monotone croissante, nous avons que $\frac{\epsilon_{n+1}}{2A_{n+1}} \leq \frac{\epsilon_n}{2A_n}$, ce qui entraîne que

$$\boxed{|f(z) - q_{n+1}(z)| \leq \frac{\epsilon_n}{2A_n},} \qquad (z \in F_n), \tag{3.3.8}$$

car $F_n \subset F_{n+1}$. De 3.3.6 et 3.3.8 on obtient finalement que

$$\boxed{|q_n(z) - q_{n+1}(z)| < \frac{\epsilon_n}{A_n},}$$

est vérifiée lorsque $z \in F_n$. Du lemme de fusion de Roth découle l'existence d'une fonction rationnelle r_n telle que

$$|r_n(z) - q_n(z)| < \epsilon_n \qquad (z \in F_n \cup \overline{\Omega}_n) \tag{3.3.9}$$

$$\text{et} \quad |r_n(z) - q_{n+1}(z)| < \epsilon_n \qquad (z \in F_n \cup (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_{n+1})). \tag{3.3.10}$$

On définit ensuite une fonction méromorphe m de la manière suivante :

$$\boxed{m(z) := q_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [r_k(z) - q_k(z)].}$$

Supposons que n soit fixé et que $z \in \Omega_n$. La fonction $r_k(z) - q_k(z)$ est holomorphe à partir du moment où $k \geq n$ car 3.3.9 implique que cette dernière soit bornée sur Ω_n, elle ne peut donc avoir de pôles dans cet ensemble. On sait qu'une fonction rationnelle qui n'a pas de pôles dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ est forcément holomorphe sur ce dernier.

Puisque 3.3.9 implique que $\sum_{k \geq n} r_k(z) - q_k(z)$ converge uniformément dans Ω_n alors m est également holomorphe dans ce dernier, à l'exception d'un nombre fini de pôles. Par conséquent, m est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que m approxime effectivement f sur F. D'abord, si $z \in F_1$, nous avons

$$\begin{aligned}
|m(z) - f(z)| &= \left| q_1(z) - f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [r_k(z) - q_k(z)] \right| \\
&\leq |q_1(z) - f(z)| + \sum_{k=1}^{\infty} |r_k(z) - q_k(z)| \\
&< \frac{\epsilon_1}{2A_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \\
&< \epsilon. \qquad (3.3.11)
\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième inégalité utilise 3.3.6 et 3.3.9.

Ensuite, on choisit $n > 1$ arbitraire, et $z \in F_n \setminus F_{n-1} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_k$ (pour $k = 1, 2, \ldots, n$), puis on exprime la différence $|m(z) - f(z)|$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
|m(z) - f(z)| = & \\
&= \left| q_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [r_k(z) - q_k(z)] - f(z) \right| \\
&= \left| q_1(z) + \sum_{k=1}^{n-1} [r_k(z) - q_k(z)] + [r_n(z) - 2q_n(z)] + [q_n(z) - f(z)] + \sum_{k=n+1}^{\infty} [r_k(z) - q_k(z)] \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n-1} [r_k(z) - q_{k+1}(z)] + q_n(z) - f(z) + \sum_{k=n}^{\infty} [r_k(z) - q_k(z)] \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} |r_k(z) - q_{k+1}(z)| + |q_n(z) - f(z)| + \sum_{k=n}^{\infty} |r_k(z) - q_k(z)| \\
&< \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k + \frac{\epsilon_n}{2A_n} + \sum_{k=n}^{\infty} \epsilon_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k + \frac{\epsilon_n}{2A_n} \\
&< \epsilon. \qquad (3.3.12)
\end{aligned}$$

De 3.3.11 et 3.3.12, conjugué au fait que $n > 1$ était arbitraire dans 3.3.12, on conclut finalement que

$$\boxed{|m(z) - f(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in F).$$

Puisque f peut être approchée uniformément sur $K \subset F$, où K est un compact arbitraire de F, par des fonctions rationnelle dont les pôles sont dans K^c, f ne peut avoir de pôles dans K, et par conséquent dans F. La fonction méromorphe m ne peut donc avoir de pôles dans F. □

Une implication du théorème de **localisation de Roth** est la généralisation du théorème de Runge aux ensembles fermés.

Théorème 3.3.2 (Roth-Runge). *Soit F un sous-ensemble fermé du plan complexe. Si f est une fonction holomorphe sur F alors elle peut être approximée uniformément sur F par des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $K \subset F$ un compact arbitraire. f étant holomorphe sur F donc, a fortiori sur K, elle peut être approximée uniformément par des fonctions rationnelles sur K avec pôles dans K^c,

$$\boxed{\therefore \quad f|_K \in R(K).}$$

Puisque $K \subset F$ était un compact arbitraire, le théorème de localisation de Roth implique que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction m méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec pôles dans $\mathbb{C} \setminus F$ telle que, pour tout $z \in F$,

$$\boxed{|f(z) - m(z)| < \epsilon.}$$

□

3.4. RELOCALISATION DES PÔLES POUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES

Dans la prochaine section (section 3.5), nous allons étudier un théorème dont l'objet est d'approximer une fonction méromorphe définie sur un fermé, par une fonction entière. Sa preuve nécessite l'utilisation d'une technique rencontrée précédemment lorsque nous avons étudié l'approximation rationnelle. Nous avions à ce moment démontré qu'il était possible de déplacer les pôles d'une fonction rationnelle, sans pour autant altérer sa capacité à approximer une certaine fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Si R était la fonction rationnelle d'origine, définie sur $F \subset \mathbb{C}$, et $\epsilon > 0$ nous était donné, nous obtenions, au moyen de cette technique, une nouvelle fonction R^* également définie sur F, mais dont les pôles étaient différents de ceux de la fonction d'origine, et telle que

$$\boxed{|R(z) - R^*(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in F). \tag{3.4.1}$$

C'est la condition 3.4.1 qui nous assure que la nouvelle fonction aura la même capacité d'approximer, et avec autant de précision, que la fonction originale R. C'est cette condition que nous devons reproduire et que la fonction méromorphe m^*, obtenue à partir de m mais dont les pôles sont relocalisés, doit satisfaire si nous voulons préserver la capacité d'approximer, et avec le même degré de précision, que la fonction originale m. Formellement, nous voulons, à partir d'une fonction méromorphe m définie dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, un fermé $F \subset \Omega$ et un $\epsilon > 0$ arbitraire, pouvoir produire une nouvelle fonction méromorphe m^* dont les pôles sont différents de ceux de la fonction m et telle que la condition suivante soit vérifiée :

$$\boxed{|m(z) - m^*(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in F).$$

Nous énonçons cette propriété sous forme d'un lemme :

Lemme 3.4.1. *Soit $F \subset \Omega$ un fermé et z_1, z_2 deux points d'une même composante de $\mathbb{C} \setminus F$. Alors, pour toute fonction m méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec pôle en z_1, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction m^*, méromorphe dans $\mathbb{C}$ qui est holomorphe en z_1 et a un pôle en z_2 et n'a d'autres pôles que ceux de m, telle que*

$$\boxed{|m(z) - m^*(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in F).$$

DÉMONSTRATION. La preuve que nous présentons utilise le fait déjà démontré au chapitre précédent que la propriété que nous énonçons est vérifiée dans le cas des fonctions rationnelles.

Les points z_1 et z_2 peuvent être reliés par une courbe de Jordan γ à l'intérieur de $\mathbb{C} \setminus F$; par conséquent, $\gamma \cap F = \emptyset$. Nous pouvons écrire

$$\boxed{m(z) = P\left(\frac{1}{z - z_1}\right) + H(z),}$$

où P est un polynôme et H est holomorphe en z_1. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire ; le théorème 2.3.1 sur la relocalisation des pôles pour les fonctions rationnelles implique l'existence d'un polynôme Q tel que

$$\boxed{\left|P\left(\frac{1}{z - z_1}\right) - Q\left(\frac{1}{z - z_2}\right)\right| < \epsilon,} \qquad (z \in F).$$

Posons

$$\boxed{m^*(z) := Q\left(\frac{1}{z - z_2}\right) + H(z).}$$

Alors m^* satisfait aux conditions du lemme. En effet, nous avons pour $|m(z) - m^*(z)|$ la majoration suivante, pour tout $z \in F$:

$$\begin{aligned} |m(z) - m^*(z)| &= \left|\left[P\left(\frac{1}{z - z_1}\right) + H(z)\right] - \left[Q\left(\frac{1}{z - z_2}\right) + H(z)\right]\right| \\ &= \left|P\left(\frac{1}{z - z_1}\right) - Q\left(\frac{1}{z - z_2}\right)\right| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

Ce lemme démontre donc que, en ce qui a trait à l'approximation de fonctions sur un fermé F par des fonctions méromorphes, on peut combiner un nombre fini de pôles à l'intérieur d'une même composante de $\mathbb{C} \setminus F$.

3.5. Approximation des fonctions méromorphes par des fonctions entières

Notre intérêt réside dans la possibilité de faire de l'approximation uniforme sur des non-bornés ; le prochain théorème est un second résultat en ce sens puisqu'il nous permet d'approximer, au moyen de fonctions entières, des fonctions méromorphes sur des fermés arbitraires, à condition toutefois que certaines caractéristiques de nature topologique soient vérifiées en ce qui a trait au complémentaire de l'ensemble d'approximation.

Théorème 3.5.1. *Soit $F \subset \mathbb{C}$ un fermé et m une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ n'ayant pas de pôles sur F. On suppose de plus que $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est connexe et localement connexe. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction entière g telle que*

$$\boxed{|m(z) - g(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in F).$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. De la propriété de connexité et de connexité locale de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ on déduit que l'infini est accessible du domaine $\mathbb{C} \setminus F$; c'est-à-dire qu'on peut relier chaque point de ce dernier au point $z = \infty$ au moyen d'une application continue $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{C} \setminus F$. Alors puisque les pôles de la fonction méromorphe m sont contenus dans $\mathbb{C} \setminus F$, il sera possible de les relier à ∞ par des chemins contenus dans $\mathbb{C} \setminus F$.

Ordonnons les pôles de m, qui sont en quantité dénombrable, en ordre de croissance de la valeur de leur module : nous obtenons de la sorte une suite de points $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $|z_j| \leq |z_{j+1}|$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Puisque, selon notre hypothèse, $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est connexe et localement connexe, et que les pôles z_j de m sont situés dans F^c, on conclut, évoquant les lemmes 3.2.2 et 3.2.1, qu'il existe pour chacun d'eux, un chemin $\gamma_j \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ les reliant au point $z = \infty$. Ceci implique que, pour chaque j, si K est un compact arbitraire du plan complexe, il existe un point de γ_j à partir duquel γ_j ne rencontre plus jamais K en d'autres mots, il existe un $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\gamma_j(t) \cap K = \emptyset$ pour $t > t_0$.

Chaque compact $K \subset \mathbb{C}$ ne peut contenir qu'un nombre fini de pôles de m car, si il en était autrement, les pôles de la fonction méromorphe m possèderaient un point d'accumulation fini, ce qui entrerait en contradiction avec le fait que les singularités de m sont, par définition, des singularités isolées.

Afin de pouvoir approximer uniformément la fonction méromorphe m par une fonction entière, nous allons construire cette dernière, à partir de m, en déplaçant les pôles de notre fonction méromorphe du centre, vers l'extérieur (lorsque l'on considère la situation du point de vue de l'espace topologique $\mathbb{C}$: le plan complexe). La justification théorique de ce procédé est décrite dans la section 3.4. Ce que nous allons faire sera de chasser donc les pôles, systématiquement, pour les amener au point à l'infini. Pour ce faire nous considèrerons la situation, formellement, du point de vue de la sphère de Riemann : $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, mais afin de se donner une idée sommaire de l'opération, on peut la décrire de manière équivalente, en se référant au plan complexe et en gardant en tête qu'à chaque voisinage [7] du point à l'infini pour la topologie de $\overline{\mathbb{C}}$ correspond l'extérieur d'un disque fermé du plan complexe, centré à l'origine.

On peut imaginer, sans crainte de restreindre la portée de cet argument, les pôles de la fonction m située à l'intérieur du disque unité. On déplace un à un les pôles à l'extérieur de ce disque. Une fois l'opération terminée, on répète la même procédure mais cette fois, on pousse les pôles, à l'extérieur du disque centré à l'origine de rayon $r = 2$. À chaque étape, on expulse les pôles de m à l'extérieur d'un disque centré en l'origine et de rayon de plus en plus grand.

La description de l'opération que nous venons de donner au paragraphe précédent est, il va sans dire, très informelle mais elle permet, tout en se dégageant du formalisme qui peut parfois être contraignant, de saisir le fondement de cette démarche.

Nous allons maintenant procéder rigoureusement. À cette fin, on définit une suite de voisinages $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de ∞ pour la topologie de $\overline{\mathbb{C}}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(1) $U_{n+1} \subset U_n$,

(2) $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{\infty\}$.

Posons $U = U_n$ et $V = U_{n+1}$ dans l'énoncé du lemme 3.2.1 et relions les pôles z_j de m dans $[U_{n+1} \setminus U_{n+2}] \setminus F$ (qui rappelons-le sont en nombre fini) à ∞ par un chemin $\gamma_j \subset U_n \setminus F$. On procède de la sorte, successivement, pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.5.1. *Cette méthode utilisant le lemme 3.2.1 pour relier les pôles de m au point $z = \infty$ nous assure que, si $K \subset \mathbb{C}$ est un compact, quel qu'il soit, il ne peut avoir une intersection non-vide qu'avec un nombre fini de chemin γ_j.*

[7]On entend ici par voisinage d'un point un disque ouvert centré en ce point.

Soit $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de domaines bornés de $\mathbb{C}$ telle que

(1) $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$,

(2) $\cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n = \mathbb{C}$.

$\overline{\Omega}_n$ est compact pour chaque n ce qui implique que chacun de ces sous-ensembles de $\mathbb{C}$ ne peut contenir qu'un nombre fini de z_j et, comme il est énoncé dans la remarque 3.5.1, la situation sera identique pour les chemins γ_j reliant ces pôles au point $z = \infty$.

Notre démarche nécessitera finalement l'utilisation d'une suite monotone décroissante de termes positifs $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \epsilon.}$$

On peut maintenant procéder au déplacement des pôles de la fonction m.

Seul un nombre fini de chemins γ_j rencontre $\overline{\Omega}_1$. Les pôles de m situés sur ces chemins sont déplacés à l'extérieur de $\overline{\Omega}_1$ le long du chemin sur lequel il est situé et le reliant au point $z = \infty$.

Par le lemme 3.4.1 sur la translation des pôles nous savons l'existence d'une fonction méromorphe m_1 telle que

$$\boxed{|m(z) - m_1(z)| < \epsilon_1,} \qquad (z \in F).$$

De plus m_1 a la particularité que tout ses pôles se trouvent sur les chemins γ_j ou à leur extrémité, à l'extérieur de $\overline{\Omega}_1$ et, par conséquent, ne rencontre pas $\overline{\Omega}_1 \cup F$.

Seul un nombre fini de chemins γ_j rencontre $\overline{\Omega}_2$. Les pôles de m_1 sur ces chemins sont, comme précédemment, expulsés à l'extérieur de $\overline{\Omega}_2$, en les glissant vers l'extérieur, tout en les déplaçant sur les chemins γ_j reliant chacun d'eux au point à l'infini. On évoque encore une fois le lemme 3.4.1 afin de justifier l'existence d'une fonction méromorphe m_2 telle que

$$\boxed{|m_1(z) - m_2(z)| < \epsilon_2,} \qquad (z \in F \cup \overline{\Omega}_1),$$

et dont tout les pôles sont situés sur les chemins γ_j ou leurs extrémités mais, ce qui importe, c'est qu'ils sont tous situés à l'extérieur de $\overline{\Omega}_2$ et donc forcément à l'extérieur de $\overline{\Omega}_2 \cup F$.

De manière analogue, à la $n^{\text{ième}}$ étape, il existe une fonction méromorphe m_n telle que

$$\boxed{|m_{n-1}(z) - m_n(z)| < \epsilon_n,} \qquad (z \in F \cup \overline{\Omega}_{n-1}). \tag{3.5.1}$$

de sorte que les pôles de m_n sont situés à l'extérieur de $\overline{\Omega}_n$ et peuvent être reliés à ∞ par des chemins γ_j sans que ces derniers ne rencontre $\overline{\Omega}_n \cup F$.

Considérons maintenant la fonction g définie de la manière suivante :

$$\boxed{g(z) := \lim_{n\to\infty} m_n(z) = m_N(z) + \sum_{n=N}^{\infty}[m_{n+1}(z) - m_n(z)].} \tag{3.5.2}$$

Puisque $n \geq N$ les fonctions m_n sont holomorphes dans Ω_N et par l'inégalité 3.5.1 la série apparaissant dans l'équation 3.5.2 définissant g converge uniformément sur $\overline{\Omega}_N$. Par conséquent, g est holomorphe dans Ω_N pour chaque $N \in \mathbb{N}$, ce qui entraine que g est holomorphe dans $\mathbb{C}$ c'est-à-dire, g est une fonction entière. Une fois de plus, l'inégalité 3.5.1 nous permet d'écrire, pour tout $z \in F$:

$$\begin{aligned}
|g(z) - m(z)| &= \left| m_1(z) - m(z) + \sum_{n=1}^{\infty}[m_{n+1}(z) - m_n(z)] \right|. \\
&\leq |m_1(z) - m(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} |m_{n+1}(z) - m_n(z)| \\
&< \epsilon_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

□

3.6. Approximation sur des non-bornés par des fonctions entières

Nous disposons maintenant de tous les outils mathématiques nécessaires afin de pouvoir présenter et surtout justifier, le plus honnêtement possible, le théorème d'approximation sur les non-bornés annoncé au début de ce chapitre.

Ce théorème ainsi que plusieurs autres résultats fondamentaux en théorie de l'approximation qualitative uniforme qui furent énoncés dans ce mémoire, sont un legs de la mathématicienne suisse Alice Roth ; ce résultat audacieux fut présenté dans sa thèse de doctorat déposée en 1938. En voici l'énoncé :

Théorème 3.6.1 (Roth, 1938). *Soit $F \subset \mathbb{C}$ un fermé tel que $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est connexe et localement connexe. Si f est holomorphe sur F et que $\epsilon > 0$ est donné, il existe alors une fonction entière g telle que*

$$\boxed{|f(z) - g(z)| < \epsilon,} \qquad (z \in F).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$. De la forme généralisée du théorème de Runge (théorème 3.3.2) on obtient l'existence d'une fonction méromorphe m avec pôles dans F^c qui approxime f uniformément sur F :

$$\boxed{|f(z) - m(z)| < \frac{\epsilon}{2},} \qquad (z \in F). \tag{3.6.1}$$

Comme $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est connexe et localement connexe le théorème 3.5.1 nous permet d'approximer m uniformément sur F par des fonctions entières. Par conséquent, il existe une fonction entière g telle que :

$$\boxed{|m(z) - g(z)| < \frac{\epsilon}{2},} \qquad (z \in F). \tag{3.6.2}$$

En combinant finalement les inégalités 3.6.1 et 3.6.2 on obtient le résultat convoité :

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |f(z) - m(z) + m(z) - g(z)| \\ &\leq |f(z) - m(z)| + |m(z) - g(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Chapitre 4

PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une propriété intrinsèque aux fonctions holomorphes définies dans des domaines bornés du plan complexe soit le **Principe du maximum**. Ce dernier stipule que *le module d'une fonction holomorphe définie dans un domaine*[1] Ω *ne peut atteindre un maximum local dans* Ω *que dans le seul cas où la fonction soit constante sur ce dernier.*

Nous allons énoncer ce théorème dans la prochaine section et en présenter une preuve assez originale dûe à Chabat [**3**]. Plutôt que d'utiliser la propriété de la moyenne, satisfaite par les fonctions holomorphes, cette preuve utilise le **Principe de conservation du domaine** dont jouissent également les fonctions holomorphes non-constantes.

Dans la section suivante, nous nous emploierons à caractériser les domaines non-bornés pour lesquels le Principe du maximum pour les fonctions holomorphes est valide. Cette section représente en fait l'aboutissement de tout le travail effectué jusqu'ici. En effet, les chapitres précédents fûrent rédigés avec comme objectif de justifier chacune des étapes de la preuve, que nous présentons dans la dernière section de ce chapitre, du **Principe du maximum pour les domaines non-bornés**.

[1]Par domaine du plan complexe on entend un sous-ensemble ouvert connexe de ce dernier.

4.2. La formulation classique du Principe du maximum pour les fonctions holomorphes

Puisque la preuve du **Principe du maximum** que nous allons présenter utilise la propriété de **Conservation du domaine** pour les fonctions holomorphes non-constantes, nous allons débuter cette section en énonçant ce résultat sous forme d'un lemme :

Lemme 4.2.1 (Principe de conservation du domaine). *Soit f une fonction holomorphe non constante dans un domaine Ω. Alors $\Omega^* = f(\Omega)$ est également un domaine.*

Démonstration. Nous devons démontrer que Ω^* est un ouvert connexe. Soient w_1 et w_2 deux points arbitraires de Ω^* ; z_1 et z_2 des pré-images respectives de ces deux points définis par f et donc, appartenant à Ω. Puisque Ω est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to \Omega$ reliant z_1 à z_2. La fonction f est évidemment continue et donc, elle préserve la propriété de connexité des ensembles sur lesquels elle est définie. Par conséquent, $\gamma^* = f(\gamma)$ sera également un chemin de Ω^*, reliant cette fois, w_1 à w_2. Puisque w_1 et w_2 étaient des points quelconques de Ω^*, on en déduit que ce dernier est connexe par arcs ce qui entraine finalement que Ω^* est connexe.

Il reste à démontrer que Ω^* est un ouvert. Soit w_0 un point arbitraire de Ω^* et $z_0 \in \Omega$, une de ses pré-images par le biais de f. $\Omega \subset \mathbb{C}$ étant un ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. On peut supposer que le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ ne contient aucun autre point dont l'image par la fonction f est w_0 car au besoin, on pourra toujours réduire le rayon de ce dernier : en effet, puisque $f \neq$ constante, le théorème d'unicité pour les fonctions holomorphes implique que les w_0-points de f sont isolés dans Ω. Posons $\gamma = \{z \in \Omega : |z - z_0| = r\}$ et soit

$$\boxed{\mu := \min_{z \in \gamma} |f(z) - w_0|.} \tag{4.2.1}$$

Par notre choix de r nous avons forcément que $\mu > 0$. Démontrons que le disque $D(w_0, \mu)$ est contenu dans Ω^*. Pour ce faire, nous ferons appel au théorème de Rouché. Soit $w_1 \subset D(w_0, \mu)$. Nous avons évidemment que $|w_0 - w_1| < \mu$. On a également que

$$\begin{aligned}|f(z) - w_1| &= |f(z) - w_0 + w_0 - w_1| \\ &\leq |f(z) - w_0| + |w_0 - w_1|.\end{aligned}$$

Nous avons d'une part $|f(z) - w_0| \geq \mu$ sur γ en conséquence de la définition de μ (définition 4.2.1) et d'autre part, $|w_0 - w_1| < \mu$. Il découle de ces deux inégalités et du théorème de Rouché que les fonctions $f(z) - w_0$ et $(f(z) - w_0) + (w_0 - w_1) = f(z) - w_1$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de γ. Puisque $f(z) - w_0$ possède un zéro à l'intérieur de γ, à savoir le point z_0, il en sera de même pour la fonction $f(z) - w_1$, en d'autres mots il existe un $\zeta \in D(z_0, r)$ tel que $f(\zeta) = w_1$. Ceci traduit le fait que w_1 est un point de Ω^*. Comme w_1 était un point arbitraire du disque $D(w_0, \mu)$, on conclut que ce dernier est inclus dans Ω^* et donc que ce dernier est ouvert, ce qui complète la preuve du théorème. □

Théorème 4.2.1 (Principe du maximum). *Si une fonction f est holomorphe dans un domaine Ω et que son module $|f|$ atteint un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$ alors f est constante.*

DÉMONSTRATION. Si f est constante, il n'y a rien à démontrer. Autrement, supposons que le module de la fonction holomorphe f atteint un maximum local au point $z = z_0 \subset \Omega$. Alors, $f(z_0) = w_0$ est un point du domaine $\Omega^* = f(\Omega)$. (On utilise ici le Principe de conservation du domaine pour les fonctions holomorphes). Par conséquent, il existe un $r > 0$ tel que $D(w_0, r) \subset \Omega^*$. Dans ce disque, il existe un point w_1 tel que $|w_1| > |w_0|$. Il existe donc un point $z_1 \in f^{-1}[D(z_0, r)] \subset \Omega$, un voisinage de z_0 tel que,

$$|f(z_1)| = |w_1| > |w_0| = |f(z_0)|,$$

contredisant le fait que le module de f atteignait un maximum local en $z = z_0$. □

Il existe différentes formulations du **Principe du maximum** (forme classique) mais celle que nous venons de présenter est la forme la plus pure, celle dont toutes les autres formulations découlent. Par exemple, une forme fréquemment utilisée dans la littérature est la suivante :

Théorème 4.2.2 (Principe du maximum). *Si une fonction f est holomorphe dans un domaine borné Ω et continue sur sa fermeture $\overline{\Omega}$ alors*

$$\boxed{\max_{\Omega} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|.}$$

DÉMONSTRATION. L'utilisation du maximum plutôt que le suprémum se justifie par le fait que la fonction f est cette fois-ci continue et il en sera ainsi de la variation de son module. Dans la forme classique du **Principe du maximum**, Ω est borné donc sa fermeture est un compact de $\mathbb{C}$. Par conséquent, le module de f atteint un maximum sur ce dernier. Or, le théorème précédent affirme que cette valeur maximum ne peut être réalisée à un point intérieur de $\overline{\Omega}$, alors la seule possibilité est que $|f(z)|$ atteigne son maximum à un point $z \in \partial\Omega$. Dans le cas où $f \equiv$ *constante*, le résultat est immédiat. □

4.3. LE PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES APPLIQUÉ AUX DOMAINES NON-BORNÉS

Le théorème qui suit caractérise les domaines non-bornés pour lesquels le **Principe du maximum** demeure valide. Son énoncé rend compte du fait que cette caractérisation relève beaucoup plus de la topologie que de l'analyse.

Théorème 4.3.1. *Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$, *pour toute f holomorphe dans Ω;*

(2) ∞ *est inaccessible de Ω.*

On utilise dans (1) la définition suivante pour le $\sup |f|$ sur $\partial\Omega$:

$$\boxed{\sup_{\partial\Omega} |f| := \sup_{\zeta \in \partial\Omega} \{\limsup_{z \to \zeta} |f(z)|\}.} \tag{4.3.1}$$

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons que ∞ soit accessible de Ω. Nous allons démontrer l'existence d'une fonction g, holomorphe dans Ω qui contrevient au principe du maximum.

Soit $\lambda : [0, \infty) \to \Omega$ un chemin continu dans Ω tendant vers ∞ :

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty.}$$

Pour chaque $t \in [0, \infty)$, $\lambda(t)$ est dans Ω un ouvert donc, pour chaque t dans cet intervalle, il existe un $r(t) > 0$ tel que le disque centré en $\lambda(t)$ et de rayon $r(t)$ est inclus dans Ω : $D(\lambda(t), r(t)) \subset \Omega$. On définit, de la sorte, un disque pour chaque $t \in [0, \infty)$.

Posons $\mathcal{D} = \bigcup_{t\in[0,\infty)} D(\lambda(t), r(t))$. $\mathcal{D}$ est un recouvrement de λ par des ouverts, eux-même contenus dans Ω. Nous avons la chaîne d'inclusion suivante :

$$\boxed{\lambda \subset \mathcal{D} \subset \Omega \subset \mathbb{C}.}$$

Posons $F_1 = \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$. F_1 est le complément d'un ouvert pour la topologie de $\mathbb{C}$; il est donc fermé dans $\mathbb{C}$.

Soit $F = F_1 \cup \{z_0\}$ où z_0 est un point arbitraire de $\mathcal{D}$. F est fermé. Le complémentaire de F par rapport à $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, est connexe et localement connexe ; en effet, on peut transformer l'écriture de F^c en effectuant les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{C}} \setminus F &= (\mathbb{C} \setminus F) \cup \{\infty\} \\
&= [\mathbb{C} \setminus (F_1 \cup \{z_0\})] \cup \{\infty\} \\
&= [\mathbb{C} \setminus ([\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}] \cup \{z_0\})] \cup \{\infty\} \\
&= [\mathcal{D} \setminus \{z_0\}] \cup \{\infty\}.
\end{aligned}$$

De cette dernière égalité on déduit que $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ satisfait aux conditions des lemmes 3.2.2 et 3.2.1. En ce qui a trait au lemme 3.2.1, la condition énoncée dans ce lemme est vérifiée puisque λ est recouvert par une famille de disques :

$$\boxed{\lambda \subset \bigcup_{r\in[0,+\infty)} D(\lambda(t), r(t)).}$$

dont la seule exigence en ce qui a trait à ces rayon était qu'ils fassent en sorte que chacun de ces disques soient contenus dans le domaine Ω. On pourrait alors, afin de s'assurer de la connexité locale de $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ au point $z = \infty$, exiger en plus que la longueur des rayons soit bornée par une constante égale à 1 par exemple (ce qui est toujours possible).

Nous allons maintenant définir une fonction f holomorphe sur F de la manière suivante :

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = z_0\,; \\ 0 & \text{si } z \in F_1. \end{cases}$$

Soit $\epsilon = \frac{1}{4} > 0$. D'après le théorème de Roth (théorème 3.6.1), il existe une fonction entière g telle que

$$\boxed{|f(z) - g(z)| < \frac{1}{4},} \qquad z \in F.$$

Parce que la fonction g approxime, sur F de trop près la fonction $f \neq$ constante, elle ne peut être constante ; par conséquent, la fonction g contrevient au principe du maximum sur Ω puisque

$$\boxed{\sup_{\partial\Omega} |g| \leq \frac{1}{4} < \frac{3}{4} \leq \sup_{\Omega} |g|.}$$

L'énoncé (1) est faux pour cette fonction, ce qui établit que (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit f une fonction holomorphe dans Ω. Supposons que

$$\boxed{\sup_{\Omega} |f| > \sup_{\partial\Omega} |f|,} \tag{4.3.2}$$

ce qui entraine évidemment que la fonction f est non-constante. En utilisant cette hypothèse, conjuguée au fait que localement, le **Principe du maximum** est vérifié, nous allons construire un chemin $\Gamma : [0, \infty) \to \Omega$ tel que

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \Gamma(t) = \infty,}$$

et ainsi démontrer l'accessibilité du point à l'infini, à partir du domaine Ω et, de ce fait, établir la négation de (2).

De toute évidence l'inégalité 4.3.2 implique que Ω n'est pas borné. Quoique nécéssaire, cette condition n'est pas suffisante afin que ∞ soit accessible de Ω. Dans l'exemple 3.2.1 : **Le gant d'Arakelyan**, rencontré précédemment, nous retrouvons l'exemple d'un domaine non-borné à partir duquel ∞ n'est pas accessible. En effet dans cet exemple, l'ensemble que nous appelions F divise le plan complexe en deux composantes connexes soit l'intérieur, et l'extérieur du gant désignées symboliquement par Ω_{int} et Ω_{ext}. Alors dans ce cas, Ω_{int} est un tel domaine.

Une fois de plus interviendra la notion de distance d'un point à un sous-ensemble du plan complexe. Ce concept fut introduit au chapitre premier (definition 1.6.1), nous en rappelons la défintion :

Définition 4.3.1 (Distance d'un point à un ensemble). *Si $z \in \mathbb{C}$ et $\Omega \subset \mathbb{C}$ alors la distance entre z et Ω est donnée par*

$$\boxed{d(z, \Omega) := \inf\{|z - \zeta| : \zeta \in \Omega\}.}$$

Soit $w_1 \in \Omega$ tel que $|f(w_1)| > \sup_{\partial\Omega} |f|$. Soit $d_1 = d(w_1, \partial\Omega)$. On considère ensuite le disque $D_1(w_1, r_1)$ où $r_1 = \frac{d_1}{2}$. $D_1(w_1, r_1) \subset \Omega$. Le **Principe du maximum** classique implique que

$$\boxed{\sup_{D_1} |f| = \sup_{\partial D_1} |f|.}$$

Par conséquent, puisque ∂D_1 est compact, il existe un point $w_2 \in \partial D_1$, tel que $\sup_{\partial D_1} |f| = |f(w_2)|$, c'est-à-dire que $|f(z)| \leq |f(w_2)|$ pour tout $z \in D_1$ et puisque f est non-constante nous avons l'inégalité stricte. En particulier : $|f(w_1)| < |f(w_2)|$. Joignons w_1 à w_2 par un segment γ_1. $\gamma_1 \subset \overline{D}_1(w_1, r_1)$ car γ_1 est un rayon du disque $\overline{D}_1(w_1, r_1)$. Soit $d_2 = d(w_2, \partial\Omega)$. On considère le disque $D_2(w_2, r_2)$ où $r_2 = \min\{r_1, \frac{d_2}{2}\}$. $D_2(w_2, r_2) \subset \Omega$. Encore une fois, pour ce disque est vérifié

$$\boxed{\sup_{D_2} |f| = \sup_{\partial D_2} |f|.}$$

Il existe donc un point $w_3 \in \partial D_2$ tel que $|f(z)| < |f(w_3)|$ pour tout $z \in D_2(w_2, r_2)$. En particulier, nous avons $|f(w_2)| < |f(w_3)|$.

Remarque 4.3.1. *Il est important de noter que $w_3 \in (\partial D_2(w_2, r_2) \setminus D_1(w_1, r_1))$; la portion de la frontière du disque $D_2(w_2, r_2)$ extérieur au disque $D_1(w_1, r_1)$ car si w_3 était un point de la portion de la frontière du deuxième disque située à l'intérieur du premier, en plus de l'inégalité :*

$$\boxed{|f(w_2)| \leq |f(w_3)|,} \tag{4.3.3}$$

nous aurions, puisque $|f(z)| \leq |f(w_2)|$ *pour tout* $z \in D_1(w_1, r_1)$,

$$\boxed{|f(w_3)| \leq |f(w_2)|.} \tag{4.3.4}$$

Les inégalités (4.3.3) et (4.3.4) entraînent évidemment que

$$\boxed{|f(w_2)| = |f(w_3)|.} \tag{4.3.5}$$

L'égalité 4.3.5 dissimule une contradiction. Le ***Principe du maximum****, dans sa forme classique (théorème 0.0.1) affirme que le seul cas où le module d'une fonction holomorphe, dans un certain domaine atteint un maximum local, est celui où la fonction est constante dans le domaine ; autrement, il n'y a pas de maximum local. Nous avons alors commencé la preuve de la suffisance de la condition* (2) *en supposant le* ***Principe du maximum*** *violé, ce qui implique que le suprémum du module de* f *est strictement plus grand à l'intérieur du domaine que sur sa frontière. Par conséquent il existe des points intérieurs du domaine pour lesquels le module de la fonction évaluée en ces points est strictement plus grand que le module de la fonction lorsqu'évaluée sur la frontière du domaine. De cette observation découle que la fonction* f *ne peut être constante.*

Mais voici où se situe la contradiction : le point $w_2 \in \partial D_1(w_1, r_1)$ *était, en accord avec le* ***Principe du maximum*** *(local), un point du disque fermé où le module de* f *atteignait son maximum. Mais* $|f(w_3)| = |f(w_2)|$ *ne pose pas de problème dans la mesure où* $w_3 \notin D_1(w_1, r_1)$ *car autrement, il implique que le module de* f *atteint un maximum dans le disque* $D_1(w_1, r_1)$ *en un point intérieur, entraînant que* f *est constante.*

On joint ensuite, par un segment γ_2 le point w_2 à w_3. $\gamma_2 \subset \overline{D}_2(w_2, r_2)$. Soit $d_3 = d(w_3, \partial\Omega)$. On considère maintenant le disque $D_3(w_3, r_3)$ où $r_3 = \min\{r_2, \frac{d_3}{2}\}$. Dans ce dernier nous avons la relation :

$$\boxed{\sup_{D_3} |f| = \sup_{\partial D_3} |f|.}$$

Donc il existe un $w_4 \in \partial D_3(w_3, r_3)$ tel que $|f(w_4)| > |f(z)|$ pour tout $z \in D_3(w_3, r_3)$ et en particulier $|f(w_3)| < |f(w_4)|$. On joint ensuite le point w_3 au point w_4 au moyen d'un segment $\gamma_3 \subset \overline{D}_3(w_3, r_3)$. On note cette fois que $w_4 \in \partial D_3(w_3, r_3) \setminus [D_1(w_1, r_1) \cup D_2(w_2, r_2)]$.

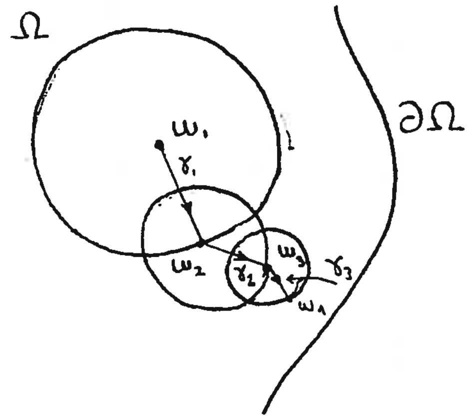

FIG. 4.3.1. Principe du maximum

À la n^{ième} étape nous obtenons un point $w_n \in \partial D_{n-1}(w_{n-1}, r_{n-1})$ où $r_{n-1} = \min\{r_{n-2}, \frac{d_{n-1}}{2}\}$, $d_{n-1} = d(w_{n-1}, \partial\Omega)$, tel que $|f(w_n)| > |f(z)|$ pour tout $z \in D_{n-1}(w_{n-1}, r_{n-1})$ et en particulier, $|f(w_{n-1})| < |f(w_n)|$. Nous savons également que

$$\boxed{w_n \in \partial D_{n-1}(w_{n-1}, r_{n-1}) \setminus [D_1(w_1, r_1) \cup \cdots \cup D_{n-2}(w_{n-2}, r_{n-2})].}$$

De plus, fait important que nous utiliserons ultérieurement, la suite $\{|f(w_j)|\}_{j=1}^{\infty}$ est une suite monotone croissante. On joint ensuite le point w_{n-1} au point w_n à l'aide d'un segment

$$\boxed{\gamma_{n-1} \subset \overline{D}(w_{n-1}, r_{n-1}).}$$

Nous avons obtenu au moyen de cette construction un chemin

$$\boxed{\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \gamma_j \subset \Omega,} \tag{4.3.6}$$

passant par chacun des termes de la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, c'est-à-dire que si on choisit $[0, \infty)$ comme intervalle de paramétrisation alors on écrit :

$$\boxed{\Gamma(t) : [0, \infty) \to \Omega,} \tag{4.3.7}$$

et il découle de cette paramétrisation de Γ l'existence d'une suite réelle $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ telle que

$$\boxed{\Gamma(t_j) = w_j,} \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.3.8}$$

Nous devons maintenant considérer la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, comme sous-ensemble de $\overline{\mathbb{C}}$. Ce dernier étant un espace topologique compact, la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ possède un point d'accumulation $w' \in \overline{\mathbb{C}}$. La question est maintenant de savoir où se trouve ce point.

Puisque $w_j \in \Omega$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, les possibilités sont au nombre de trois, à savoir :

(1) $w' \in \Omega$,

(2) $w' \in \partial\Omega - \{\infty\}$,

(3) $w' = \infty$.

(1) **Point d'accumulation dans Ω.** Soit w' un point d'accumulation de la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, $w' \in \Omega$. Alors il existe une sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ telle que

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} w_{j_k} = w'.}$$

f ne peut être constante sur la sous-suite car par le principe d'unicité pour les fonctions holomorphes nous aurions $f \equiv$ constante dans Ω ce qui entrerait en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle

$$\boxed{\sup_{\Omega} |f| > \sup_{\partial\Omega} |f|,}$$

car dans le cas où $f \equiv$ constante nous aurions, en conformité avec la définition de $\sup_{\partial\Omega} |f|$, définition 4.3.1,

$$\boxed{\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.}$$

Puisque f est continue nous avons

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} f(w_{j_k}) = f(w'),}$$

ce qui implique que $\lim_{k\to\infty} |f(w_{j_k})| = |f(w')|$ car la fonction $|\cdot|$ est également une fonction continue.

Soit $\rho = d(w', \partial\Omega) > 0$. On définit un disque centré en w' et de rayon $r = \frac{\rho}{2}$ que l'on désigne symboliquement par $D\left(w', \frac{\rho}{2}\right)$. Soit $w_{j_{k_1}}$ le premier terme de la sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tel que $w_{j_k} \in D\left(w', \frac{\rho}{2}\right)$. On considère ensuite le disque engendré par ce terme lorsque celui-ci est associé à la suite originale $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ c'est-à-dire, le disque $D\left(w_{j_{k_1}}, r_{j_{k_1}}\right)$ où,

$$\boxed{r_{j_{k_1}} = \min\{r_{j_{k_1}-1}, d_{j_{k_1}}/2\}} \tag{4.3.9}$$

Il est clair que pour ce premier terme ainsi que les termes suivants de la sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ c'est-à-dire, pour tout $k \geq k_1$, nous avons que $d(w_{j_k}, \partial\Omega) \geq \frac{\rho}{2}$ puisque ces derniers sont tous des points intérieurs[2] du disque $D\left(w', \frac{\rho}{2}\right)$.

Nous devons considérer deux possibilités pour ce qui est de la valeur du rayon du disque centré sur le dernier point de la sous-suite extérieur à $D\left(w', \frac{\rho}{2}\right)$ à savoir le point w_{j_k-1}.[3] La première est que $r_{j_k-1} \geq \frac{\rho}{2}$. Dans ce cas nous aurons, en conformité avec la définition des rayons des disques que,

$$\boxed{r_{j_k} \geq \frac{\rho}{2}} \qquad \text{pour tout } k \geq k_1. \tag{4.3.10}$$

Pour ce qui est de la seconde c'est-à-dire, dans le cas où $r_{j_k-1} < \frac{\rho}{2}$, nous aurons à ce moment que

$$\boxed{r_{j_k} = r_{j_k-1}} \qquad \text{pour tout } k \geq k_1, \tag{4.3.11}$$

mais ce qui importe c'est que dans les deux cas, la mesure du rayon des disques engendrés par les termes de la sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui se trouvent à l'intérieur du disque $D\left(w', \frac{\rho}{2}\right)$ sera bornée inférieurement par un nombre positif. En effet, nous

[2] On peut supposer, sans risque de compromettre le caractère général de l'argument présenté, que les termes de la sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sont ordonnés en ordre de valeur décroissante de la distance qui les séparent du point de convergence c'est-à-dire, le point w'.

[3] Si tout les points de la sous-suite sont contenus dans le disque $D\left(w', \frac{\rho}{2}\right)$ alors nous aurons que,

$$\boxed{d(w_{j_k}, \partial\Omega) \geq \frac{\rho}{2}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

ce qui simplifie la démonstration car dans ce cas nous avons que,

$$\boxed{r_{j_k} \geq \frac{\rho}{2}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

aurons

$$\boxed{r_{j_k} \geq \min\left\{r_{j_k-1}, \frac{\rho}{2}\right\} > 0.} \tag{4.3.12}$$

On pose alors $\epsilon = \min\{r_{j_k-1}, \frac{\rho}{2}\} > 0$. De la convergence de la sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vers w' nous obtenons l'existence d'un indice $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq k_0$ alors,

$$\boxed{w_{j_k} \in D(w', \epsilon),} \tag{4.3.13}$$

c'est-à-dire que tout les termes de la sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sont, à partir d'un certain rang, séparés de w' par une distance qui est moindre que $\epsilon = \min\{r_{j_k-1}, \frac{\rho}{2}\} > 0$.

Il découle de ce qui précède que $w' \in D(w_{j_k}, r_{j_k})$ pour tout $k \geq k_0$. En d'autres mots, le point d'accumulation appartiendra à tout les disques engendrés par les termes de la sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, à partir d'un certain rang (le rang $k = k_0$). On prend un de ces disques, disons le disque $D(w_{j_{k_0}}, r_{j_{k_0}})$. Pour deux raisons, d'abord d'une part comme conséquence de la façon dont les termes de la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ furent choisis et d'autre part, comme conséquence de l'application du **Principe du maximum**, nous avons,

$$\boxed{|f(w')| \leq |f(w_{j_{k_0}+1})|,} \tag{4.3.14}$$

où $w_{j_{k_0}+1}$ est le successeur de $w_{j_{k_0}}$ par rapport à la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$. Il n'est pas forcément un terme appartenant à la sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Mais comme $j_{k_0} \leq j_{k_0} + 1 \leq j_{k_0+1}$[4], et que $\{|f(w_j)|\}_{j=1}^{\infty}$ est monotone croissante, la relation suivante est vérifiée :

$$|f(w_{j_1})| \leq |f(w_{j_1+1})| \leq |f(w_{j_2})|.$$

Maintenant il est clair que si une suite est monotone croissante, il en sera ainsi de n'importe quelle sous-suite de cette suite. Par conséquent,

$$\boxed{|f(w_{j_1})| \leq \lim_{k\to\infty} |f(w_{j_k})| = |f(w')|.} \tag{4.3.15}$$

Cependant, comme nous en avons fait la remarque un peu plus haut (remarque 4.3.1), le cas d'égalité entraînerait le fait que $f \equiv$ constante, ce qui ne peut être

[4]Il existe la relation suivante entre les indices des termes de la sous-suite et ceux de la suite : $j_{k_0+1} = j_{k_0} + n_1$, $j_{k_0+2} = j_{k_0+1} + n_2 = j_{k_0} + (n_1 + n_2) \ldots$ où $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une sous-suite de $\mathbb{N}$.

le cas.

$$\boxed{\therefore\ |f(w_{j_1})| < |f(w')|.} \tag{4.3.16}$$

Les inégalités 4.3.14 et 4.3.16 ainsi que l'inégalité 4.3.2 combinées entraînent que $|f(w')| < |f(w')|$, une contradiction ; en effet de l'inégalité 4.3.2 découle que la suite $|f(w_{j_k})|$ doit être strictement croissante. Puisque cette contradiction repose sur le fait que nous ayons présumé que la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ possédait un point d'accumulation w' dans Ω, nous sommes forcés de rejeter cette hypothèse ; w' ne peut être un point de Ω.

2) **Point d'accumulation sur $\partial\Omega - \{\infty\}$.** Soit w' un point d'accumulation de la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$. Comme précédemment cette hypothèse implique l'existence d'une sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers w'. De la monotonicité de la suite $\{|f(w_{j_k})|\}_{k=1}^{\infty}$ ainsi que de la définition 4.3.1 pour $\sup_{\partial\Omega}|f|$ on obtient la suite d'inégalité suivante,

$$\sup_{\partial\Omega}|f| < |f(w_{j_1})| \leq |f(w_{j_2})| \leq \cdots \leq \limsup_{k\to\infty}|f(w_{j_k})| \tag{4.3.17}$$

$$\leq \sup_{\zeta\in\partial\Omega}\left\{\limsup_{z\to\zeta}|f(z)|\right\} \tag{4.3.18}$$

$$= \sup_{\partial\Omega}|f|. \tag{4.3.19}$$

La première inégalité, qui est stricte, découle de l'hypothèse (4.3.2) qui est la négation de (1) dans l'énoncé du théorème.

$$\boxed{\therefore\ \sup_{\partial\Omega}|f| < \sup_{\partial\Omega}|f|.}$$

Une fois de plus, nous obtenons une contradiction suivant laquelle nous sommes forcés de conclure que l'hypothèse nous y ayant conduit doit être rejetée ; par conséquent, $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ ne peut avoir un point d'accumulation sur $\partial\Omega - \{\infty\}$.

3) **Point d'accumulation au point $z = \infty$.** Il ne nous reste plus que le point à l'infini comme possibilité d'emplacement du point d'accumulation de la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$. Peu importe qu'elle converge ou non comme nous l'avons mentionné plus haut, l'ensemble des points de cette suite, comme sous-ensemble de $\overline{\mathbb{C}}$, un compact, doit posséder un point d'accumulation.

Ce fait entraîne que la suite, dans son entier, converge vers le point à l'infini sur la sphère de Riemann et par conséquent le chemin Γ converge également vers ce point[5], ce que nous allons démontrer à l'instant.

Supposons, par contradiction, que $w_j \nrightarrow \infty$. Ceci entraîne qu'il existe une sous-suite $\{w_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ dont les points appartiennent à un compact $M \subset \Omega$, ce qui implique que cette dernière possède un point d'accumulation ou bien dans Ω, ou alors dans $\partial\Omega - \{\infty\}$. Or, il fut démontré précédemment que ces deux éventualités étaient impossibles comme emplacement d'un point d'accumulation de la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$. Par conséquent nous avons que,

$$\boxed{\lim_{j\to\infty} w_j = \infty.} \qquad (4.3.20)$$

De l'identité 4.3.20, conjuguée au fait que nous avons construit le chemin Γ en joignant les points de la suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ par des segments de droite et que la longueur de ces derniers est majorée par la longueur du rayon du disque qui le précède dans la construction de cette suite, ce dernier étant lui-même majoré par r_1, le rayon du premier disque (ceci découle du fait que nous avons procédé par induction afin de déterminer la longueur des rayons[6] des disques utilisés pour construire la

[5]Nous utilisons l'expression **converger** vers le point à l'infini parce que nous nous trouvons dans l'espace topologique $\overline{\mathbb{C}}$, la sphère de Riemann. Sur cette dernière, le point à l'infini n'a rien de particulier ; alors une suite de points peut converger vers ce point comme tout autre point de la sphère. On peut définir la convergence en terme de distance définie pour n'importe quelle pair de points de la sphère, y compris le point à l'infini. Alors converger vers le point à l'infini a un sens sur la sphère de Riemann.

[6]En effet, le procédé utilisé afin de déterminer la longueur des rayons des disques entraine que la suite $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ est une suite monotone décroissante.

suite), on conclut que le chemin Γ converge également vers l'infini[7] :

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \Gamma(t) = \infty,} \tag{4.3.21}$$

démontrant ainsi que le point $z = \infty$ est accessible du domaine Ω et complète la preuve du théorème 4.3.1. □

[7]Il est important de noter que de manière générale, la convergence d'une suite vers un point n'entraine pas nécéssairement la convergence d'un chemin passant par les points de cette suite vers ce même point. En effet, considérez la suite $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ de points de $\mathbb{R}$ définie par $t_k = \frac{1}{k\pi}$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Il est clair que

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} t_k = 0.}$$

Pourtant, les points de cette suite appartiennent tous au chemin Γ défini par l'équation suivante,

$$\boxed{\Gamma(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)}$$

et ce dernier ne tend vers aucune limite lorsque $t \to 0$; en effet, le graphe de $\sin(\frac{1}{t})$ oscille entre les valeurs $+1$ et -1 de plus en plus rapidement lorsque la variable de paramétrisation s'approche de 0, donc la limite n'existe pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lars V. Ahlfors,*Complex Analysis*, McGraw-Hill, third edition, 1979.

[2] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, second editon, 1974.

[3] B. Chabat, *Introduction à l'Analyse Complexe, Fonctions d'une Variable*, Editions Mir, 1990.

[4] U. Daepp, P. M. Gauthier, P. Gorkin, G. Schmieder,*Alice in Switzerland : The Life and Mathematics of Alice Roth*, The Mathematical Intelligencer, 2005.

[5] Dieter Gaier, *Lectures on Complex Approximation*, Birkhäuser, 1985.

[6] Theodore W. Gamelin, *Complex analysis*, Springer, 2001.

[7] Paul M. Gauthier, *Uniform approximation*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[8] P.M.Gauthier, Chen Huaihui, *A Maximum Principle for Subharmonic and Plurisubharmonic Functions*, Canadian Mathematical Bulletin, Vol.35(1), 1992.

[9] P.M.Gauthier, R.Grothmann, W.Hengartner, *Asymptotic Maximum Principles for Subharmonic and Plurisubharmonic Functions*, Canadian Journal of Mathematics, Vol. XL, No.2 1988.

[10] S.Lipschutz, *Set Theory and Related Topics*, Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1964.

[11] Alekseĭ I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, three volumes in one, Chelsea Publishing Company, 1985.

[12] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, second edition, 2000.

[13] I.M.Singer, J.A.Thorpe, *Lectures Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer, 1967.

[14] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[15] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[16] Angus E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley and Sons, 1958.